Einführung

Bemerkungen zum Studium

Warum Mathematik ? Ziel der Naturwissenschaften und insbesondere der Ingenieurwissenschaften ist die *quantitative a priori* Beschreibung von physikalischen oder technischen Abläufen. Das Werkzeug dafür ist die Mathematik. Die Mathematik ist zudem eine exakt definierte Sprache für die *Kommunikation* zwischen Naturwissenschaftlern und Ingenieuren.

Schlußfolgerung: ein Beherrschen dieses Werkzeug ermöglicht eine sichere und präzise Beschreibung von physikalischen oder technischen Abläufen oder eine Verwendung vorhandener Erkenntnisse.

Wie wird Mathematik angewendet? Der mathematische Erkenntnisprozeß kann für die Ingenieurarbeit grob in folgender Weise skizziert werden:

(1) Formulierung von vorhandenem Wissen (*Voraussetzungen*) und Erkenntnisziel auf relativ abstrakter Ebene (*Modellierungsphase*).

(2) Ermitteln von Zusammenhängen auf der abstrakten Ebene, bis die Zielgröße funktional auf die Ausgangsgrößen zurückgeführt ist (*Beweisphase, Umformungsphase*).

(3) Schrittweise Reduktion der abstrakten Formulierung bis hin zu praktisch berechenbaren Termen (*Quantisierungsphase*).

(4) Berechnung von Ergebnissen für spezielle Aufgabenstellungen (*Programmieren, Datenbeschaffung, usw.*).

(5) Qualitätssicherung der Ergebnisse, d.h. Gültigkeitsprüfung des Modells für die Anwendung und Prüfung und Probe von Programmen und Daten auf rechnerische und logische Fehler vor dem Einsatz der Ergebnisse.

In welchem Umfang Mathematik ? Vom für den Einsatz verantwortlichen Ingenieur ist die Beherrschung ab der Quantisierungsphase ein Muß. Dies schließt den Fall »*man suche eine Formel und setze Zahlen ein!*« ein: es liegt im Verantwortungsbereich des Ingenieurs, eine »Formel« zu verstehen und ihre Anwendbarkeit auf eine gegebene Aufgabe zu erkennen und zu überprüfen. Dies verlangt ein physikalisches Verständnis für abstrakte mathematische Formulierungen.

Anmerkung: Formulierungen auf abstrakter Ebene und Führen mathematischer Beweise sind für das Erreichen dieser Ziele notwendiger Bestandteil der Ausbildung und dürfen nicht als »*irrelevant*« für Ingenieure betrachtet werden.

Wo ist der Praxisbezug ? Eines der meistgebrauchten Argumente gegen eine intensive mathematische Ausbildung ist die Phrase „*Und was soll ich damit?*“. Diese Frage verkennt, daß die Mathematikvorlesung die Benutzungsmöglichkeiten eines <u>Werkzeugs</u> vermittelt. Funktion und Einsatzbereich von Werkzeugen lassen sich zweckmäßig an speziell dafür konstruierten Beispielen demonstrieren. Es ist Aufgabe der speziellen Fachveranstaltungen, den Realeinsatz dieses Werkzeuges vorzustellen.

Darüber hinaus gibt es weitere wissenschaftstheoretische Gründe gegen einen ausschließlichen „Praxisbezug“, deren Diskussion allerdings den hier gesteckten Rahmen sprengen würde.

Was soll gelernt werden ? Ziel des Studiums ist der »eigenverantwortliche und kompetente« Ingenieur, der in der Lage ist, selbständig vorgegebene Aufgaben zu lösen. Fachwissen ist nur ein Teil der geforderten Kompetenz : um zu Lösungen komplexer Aufgaben zu kommen, ist es nicht nur wichtig, Anworten auf Fragen zu wissen, sondern die richtigen Fragen exakt zu formulieren. In diesem Sinn ist auch das Lernziel der Mathematikvorlesung zu sehen : die exakte Formulierung des »*Worum geht es und wohin soll es gehen ?«* muß vor jeder Umformung (*oder »Formelsuche«*) stehen.

Wie arbeite ich mathematisch ? Bei der mathematischen Bearbeitung einer Aufgabe ist streng auf die historische Begründbarkeit jeder Folgerung oder Festlegung zu achten. Historische Begründbarkeit bedeutet, daß ausschließlich bekannte Axiome, Definitionen oder Regeln verwendet werden dürfen. Bei der Einführung neuer Definitionen oder Regeln ist deren Gültigkeit oder Sinn anhand der bestehenden Regeln peinlich genau zu begründen. Mit anderen Worten : ein „*ich habe gedacht, daß ...*“ ohne eine lückenlose Begründung des Gedachten hat in der Mathematik nichts verloren.

Bemerkungen zur Vorgehensweise und zum Lernen

Für die Vermittlung des Stoffs werden folgende Mittel eingesetzt:

1. Das **Skript** beinhaltet Definitionen, Theoreme, Beispiele und Aufgaben in komprimierter Form und ist zur begleitenden Bearbeitung des Stoffes während der Vorlesung (*Vorbereitung, Mitarbeit und Nachbearbeitung*) gedacht.
2. Die **Vorlesung** vermittelt zusätzlich Zugänge zum Stoff und klärt Zusammenhänge mittels weiterer Beispiele und Kurzaufgaben. Durch selektive Mitschrift kann das Skript in der Vorlesung für die individuellen Notwendigkeiten des Stoffverständnisses ergänzt werden.
3. Die **Übungsaufgaben** dienen der persönlichen Förderung des Verständnisses und der praktischen Umsetzung. Zum Teil sollen die Aufgaben mit Hilfe mathematischer Computerprogramme gelöst werden, um Einsichten in dieses an Bedeutung gewinnende Werkzeug zu vermitteln.
4. Ein klassisches **Lehrbuch** ergänzt den Stoff in der Tiefe und stellt eine Methodensammlung für die Anwendung in Fachveranstaltungen dar.

Der Stoff ist didaktisch so aufbereitet, daß eingeführte Begriffe im weiteren Verlauf (*häufig unmittelbar*) für die Bearbeitung neuer Fragestellungen benötigt werden. Ein qualitatives Verständnis ist ebenso wichtig wie eine quantitative Bearbeitung. Als Konsequenz muß die Aufarbeitung des Stoffes durch den Studierenden laufend erfolgen. „Abschalten“ führt zu Lücken, die ein Verständnis des weiteren Stoffes stark erschweren.

Zum schnellen Erreichen des Lernziels ist eine intensive Kommunikation mit den Lehrenden ausdrücklich erwünscht. Die Kommunikation muß auf dem Prinzip der „qualifizierten Frage“ aufbauen, d.h. es muß die Beschäftigung mit der Thematik erkennbar und die Bereitshcaft vorhanden sein, die Ergebnisse dieser Beschäftigung vorzutragen.

Mathematische Begriffe und Formalismen

Das Gebäude der Mathematik beruht auf Axiomen, Definitionen und Schlußfolgerungen.

Axiome sind plausible Schlußfolgerungen über natürliche Zusammenhänge. Da sie keine Wurzeln haben, sind sie nicht beweisbar. Das Aufstellen und Begründen eines Axiomensystems ist mehr ein mathematisch-philosophisches Problem. Ziel ist, mit einem möglichst knappen Axiomensystem das gesamte Gebäude der Mathematik widerspruchsfrei erklären zu können.

Anmerkung : es existieren unterschiedliche Axiomensysteme zu verschiedenen mathematischen Gebieten, die unterschiedliche Arten von »Wirklichkeit« beschreiben. Die Konsistenz des mathematischen Gebäudes beruht darauf, daß Aussagen verschiedener Axiomensysteme über gemeinsame Objekte identisch sind.

Definitionen sind Festlegungen von Objekten oder Objektgruppen mit bestimmten Eigenschaften oder Vereinbarungen neuer Regeln. Definitionen werden in manchen (*wichtigen*) Fällen auch als Axiome bezeichnet.

Anmerkung : prinzipiell besteht Freiheit der Festlegung von Definitionen. Man tut jedoch gut daran, darauf zu achten, dass Definitionen einander nicht widersprechen, den die Konsequenz wäre, dass keine Objekte dazu existieren. Der prinzipielle Vorrang »älterer« gegenüber »jüngeren« Definitionen ist z.B. axiomatisch geregelt!

Schlußfolgerungen sind alle Aussagen, die mit Hilfe der Definitionen, der Axiome <u>und bereits bestehender Aussagen</u> getroffen werden. Wichtige Schlußfolgerungen (*weil häufig benutzbar*) erhalten den Status eines **Theorems**.

Jede Schlußfolgerung ist zu <u>beweisen</u>, d.h. ihre Widerspruchsfreiheit mit dem bereits bestehenden Gebäude ist zu belegen.

Anmerkung : je nach Ausgangspunkt können Theoreme des einen Bearbeiters als Axiome eines anderen auftreten. Dies dient einer persönlichen Darstellung eines Lehr- und Verständnisgebäudes und ist nicht als „Verwirrspiel“ gedacht.

Die Existentz einer »Historie« ist ein zentrales Axiom in der Mathematik. Einer der häufigsten Fehler von Anfängern ist die Nichtbeachtung dieses Axioms. Die Mathematik ist in diesem Sinne deterministisch: alles steckt widerspruchsfrei im Anfang oder in den folgende »Erkenntnistagen«. Bei der Herleitung von Schlußfolgerungen neigen viele Anfänger dazu, »mal etwas anzunehmen«, statt eine Verbindung zu bereits registrierten Erkenntnissen herzustellen.

Vielfach wird die mathematische Vorgehensweise als absolut logisch und determiniert, aber nicht durchschaubar angesehen. Die vorhergehende Bemerkung widerlegt dies: alle Schlußfolgerungen sind zwar im Axiomensatz enthalten, sie sind jedoch durch geeignete Verwendung einer zunehmend größeren Menge bereits »entdeckter« Schlußfolgerungen ebenfalls zu »entdecken«. Dabei existieren meist mehrere Möglichkeiten, zum Erfolg (*oder auch zum Mißerfolg*) zu gelangen. Die Herleitung einer mathematische Schlußfolgerung ist daher genau so eine experimentelle Arbeit wie zum

Beispiel das Schaffen einer Plastik aus einem Holzklotz, nur eben mit anderen Mitteln.

Diesen experimentellen Charakter der Mathematik zu erkennen und umzusetzen, d.h. etwas auszuprobieren und dadurch Erkenntnisse zu gewinnen, scheint eines der gravierenden Probleme von Anfängern zu sein.

Absolut determiniert ist allerdings die Schärfe der Sprache. Zwischen verschiedenen Begriffsbildungen ist genau zu unterscheiden - es ist nicht „*egal*“, ob ein Objekt „*aus etwas besteht*“ oder „*etwas beinhaltet*“. Die Eindeutigkeit wird häufig durch eine, für den Anfänger gewöhnungsbedürftige, Symbolschrift hergestellt.

Arbeitsmethodik

Im folgenden werden einige Hinweise gegeben, die sich sowohl auf ein effektives Lernen als auch auf ein strukturiertes Handhaben der Kenntnisse in der Anwendung beziehen. Insbesondere die beschriebenen Prinzipien der allgemeinen Arbeitsweise sollten kurzfristig umgesetzt werden, da sich hierdurch eine Reihe von Reibungsverlusten insbeondere bei Prüfungen vermeiden lassen.

<u>Beobachtungen und Problematik:</u>

1. Nach Stellen einer Aufgabe sitzt der Proband lange Zeit aktionslos vor einem leeren Stück Papier. Auch Hilfestellungen der Betreuer ändern meist nichts an diesem Zustand, obwohl im Gespräch zu erkennen ist, daß die prinzipielle Vorgehensweise bekannt ist. Argumente für das Verhalten:
   - »ich weiß nicht, ob ich etwas falsches mache«
   - »ich bekomme die Details nicht zusammen«
   - »ich kann mir nichts darunter vorstellen«
2. Ein eigener oder mitgeschriebener Lösungsversuch einer Aufgabe ist nach einigen Tagen mit der erstellten Dokumentation nicht mehr nachzuvollziehen.

<u>Notwendige Änderungen der persönlichen Einstellung:</u>

1. Grundsätzlich ist der Gedanke aufzugeben, »etwas falsch« zu machen. Der Nachweis, daß ein bestimmter Weg nicht zum Ziel führt, ist ein positiver Nachweis !
2. Es ist nichts zu einfach und primitiv, um nicht als Konzept notiert zu werden ! Gerade der Anfänger sollte selbst „primitive“ und klar erscheinende Vorstellungen aufschreiben, da vielfach erst dann die für die Bearbeitung der Aufgabe wichtigen Details hervortreten (*oder deutlich wird, daß die Angelegenheit doch nicht so „primitiv“ ist*).
3. Wenn mehrere Gedanken nicht einzeln und ordnungsgemäß dokumentiert werden, verliert man nach einiger Zeit <u>automatisch</u> den Überblick. Dies trifft auf den Anfänger bereits bei weniger Details zu als beim Fortgeschrittenen. Die mangelnde Übersicht verhindert das Finden eines Lösungsweges.
4. Es ist nicht notwendig (*und teilweise auch nicht möglich*), sich an jeder Stelle »etwas Praktisches« vorstellen zu können. Ein Großteil der verlangten Arbeit ist <u>mechanischer</u> Art (*Einsetzen von Termen in andere Terme, Umformungen, ...*) und verlangt kein Verständnis (*die Frage nach einem „Verständnis“ ist in eingen Fällen sogar unangebracht*).
5. Es wird viel zu wenig experimentiert (*benutzen bekannter Terme, Analogschlüsse, usw.*). Erfahrungsgemäß lassen sich durch experimentelles Vorgehen relativ sicher auch von Anfängern »passende« von »unpassenden« Ausdrücken trennen.

<u>Allgemeine Arbeitsweise:</u>

(a) Man benutze für die Lösung von Aufgaben mindestens zwei, besser sogar drei Dokumentarten:

(a.a)»Konzeptpapier« zum ungeordneten Notieren von Nebenrechnungen, Proben usw. Dieses Papier dient nur der momentanen Arbeit und kann anschließend vernichtet werden.

(a.b)»Lösungsbogen« zum Notieren des Lösungsweges in strukturierter, nachvollziehbarer Form. In diesen Bogen werden nur fertige Teile des Konzeptes aufgenommen und in logischer Reihenfolge sortiert und kommentiert; für das spätere Verständnis unnötige Details können fehlen.

Falls dieser Bogen bereits in entsprechender Form ausfällt, kann er als Lösungsdokument verwendet werden.

(a.c) »Lösungsdokument« als überarbeitete version des »Lösungsbogens«. Ein Lösungsdokument soll so angelegt sein, daß bei einer späteren Wiederholung die Durchführung der Nebenrechnung anhand der Vorgabe leicht erkannt und durchgeführt werden kann.

(b) Zunächst sind vollständig aufzuführen:

(b.a) Benutzte Grundlagen (*z.B. reelle und komplexe Zahlen, ...*)

(b.b) Randbedingungen (*z.B. Startwerte, nicht überschreitbare Grenzen, ...*)

(b.c) Fragestellung (*wonach wird gesucht, welches Ergebnis wird erwartet, ...*).

(c) Auch primitiv erscheinende oder möglicherweise nichts zur Lösung beitragende Überlegungen sind zumindest im Konzeptbereich zu notieren. Nur so kann sichergestellt werden, daß alle Ideen zur Lösung der Aufgabe auch Berücksichtigung finden.

(d) Durchführung der Berechnung oder Umformung unter sorgfältiger Dokumentation <u>aller</u> (*d.h. auch eines großen Teils aller unwichtig oder trivial erscheinender*) Überlegungen und Teilschritte.

Aus der Dokumentation muß auch erkennbar sein, ob ggf. in den Voraussetzungen nicht genannte Grundlagen genutzt werden (*nebst ev. Begründung, warum dies zulässig ist*).

(e) Interpretations des Ergebnisses, d.h.

(e.a) ist eine Antwort auf die Fragestellung erkennbar und wie sieht sie aus,

(e.b) werden Antworten auf nicht gestellte Fragen gegeben ?

(f) <u>Probe/Prüfung</u> des Ergebnisses: ist das Ergebnis plausibel ? Ergibt das Einsetzen des Ergebnisses in die Ausgangsterme eine vernünftige Aussage ?

Mathematik I, 1. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Organisation der Veranstaltung: Übungen und Prüfungen
- Zusammenhang Mathematik <--> Fachvorlesungen.:

```
Mathematik:      abtraktes Arbeiten ----> Erkenntnis
               |
                 v
Anwendung:       zahlenorientiertes Arbeiten ----> Ergebnis
               |                               ^
                 v                               |
Numerik:         häufig computerorientiert ----> Algorithmen,
                                                  Komplexität, Fehler
```

- Zur Notwendigkeit der abstrakten Arbeitsweise: Einsatz der korrekten Methoden, Effizienz
- Das mathematische Gebäude: widerspruchsfreies Historienmodell
- Zur Widerspruchsfreiheit: Der Beweis
  - Mathematik ist experimentell: Arbeitsweise und Fehler
  - grundsätzliches zur Beweisführung
  - Beweise in Büchern
- Probleme mit der Mathematik: die mathematische Sprache, Folgerungen aus dem Historienmodell, nochmals Arbeitsweise, vorausgesetzte Kenntnisse, permanente Mitarbeit.

1. Abschnitt: Aussagelogik

- Sätze, Auswertungsfunktionen, Aussage als Satz mit eindeutiger Auswertung „wahr“ oder „falsch“.
- Mathematische Notation der Aussagebewertung: $f: a \to \{0,1\}$
- Verknüpfungen von Aussagen: unäre, binäre, ternäre, usw. Verknüpfungen, notwendig nur unäre und binäre Verknüpfungen
- Die beiden unären Verknüpfungsoperatoren: Identität $\iota a: \{ \begin{matrix} 0 \to 0 \\ 1 \to 1 \end{matrix}$, Negation $\neg a: \{ \begin{matrix} 0 \to 1 \\ 1 \to 0 \end{matrix}$
- Binäre Verknüpfungen $a \circ b$: 4 Kombinationen von Eingangswahrheitswerten sind zu untersuchen.

Hausaufgabe zur nächsten Vorlesung: Stellen Sie sämtliche möglichen Ergebnisse für binäre Verknüpfungen in einer Tabelle dar.

Literatur:

Allgemein: Peter Stingl, Mathematik für Fachhochschulen; Lothar Papula, Mathematik

Speziell für Logik/Mengen: B. Partee, A. ter Meulen, R. Wall, Mathematical Methods in Linguistics

b) Aufgaben

(1) Elementarer Schulstoff wird für das Studium vorausgesetzt. Hierzu zählen: Umformen von Ausdrücken und Gleichungen, Rechnen mit Brüchen, Potenzen und Logarithmen, Kenntnis der elementaren binomischen Formeln, Lösen von quadratischen Gleichungen, elementare geometrische Beziehungen wie Flächen von Rechtecken, Dreiecken und Kreisen sowie Abstandsberechnungen von Punkten.

a) vereinfache, forme um oder löse, wenn möglich:

$$a^7 * a^9 \ , \ a^3 * b^4 \ , \ a^4 * \sqrt[4]{a} \ , \ (a^3)^3 \ , a^2 + b^2 , a^2 - b^2 , \quad a^{3^3} \ , \ (a^3)^3$$

$$\log(a+b) \ , \ \log(a*b) \ , \ \log(a^b) \ , \ \log(a) + \log(b) \ , \log(a) * \log(b)$$

b) Ein senkrechter Stab steht in einem Teich und berührt mit dem unteren Ende den Grund. Das obere Ende ragt genau einen Meter über die Wasseroberfläche hinaus und ist genau einen Meter vom Ufer entfernt. Lenkt man die Stabspitze zum Ufer hin (*der Stab bleibe gerade, der Fußpunkt bleibe erhalten*), so kommt die Spitze genau auf den Uferrand zu liegen. Berechnen Sie die Tiefe des Teichs am unteren Ende des Stabes!

c) Weisen Sie durch direkte Rechnung nach: das Produkt von 4 aufeinander folgenden natürlichen Zahl ist genau um 1 kleiner als das Quadrat einer weiteren natürlichen Zahl.

Hilfe: ist n eine natürliche Zahl, so sind (n+1), (n+2), ... die darauf folgenden Zahlen. Die 5. Zahl können Sie mit m bezeichnen. Stellen Sie eine Gleichung auf, machen Sie eine Probe mit einigen Zahlenbeispielen und formen Sie die Gleichung nach m um. Sie benötigen dazu die binomischen Sätze.

Weitere Aufgaben (*beispielsweise zur Bruchrechnung*) werden in der Übung vom Übungsleiter gestellt. Wiederholen Sie den Stoff in Eigenarbeit! Der Stoff wird in der Vorlesung vorausgesetzt und nicht weiter erläutert.

d) Geben Sie einige Beispiele für Aussagen an, geben Sie einige Beispiele für Nichtaussagen an. Bei „Nichtaussagen“ im Sinne der klassischen Aussagelogik lassen sich verschiedene Klassen unterscheiden. Versuchen Sie, einige zu identifizieren.

e) Weisen Sie nach, dass folgende Beziehung zwischen den unären Operatoren existiert: $\neg\neg \;\; = \iota$

Mathematik I, 2. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

Zur Hausaufgabe. Aus den 4 Kombinationsmöglichkeiten der logischen Verknüpfung $a \circ b$ lassen sich 16 verschiedene Kombinationen von jeweils wiederum 4 Ausgabewerten konstruieren.

Einführung in die elementare Aussage-Logik

- Zuordnung der sprachlichen Verknüpfungen „und, oder, wenn...dann, ...genau dann, wenn..., entweder ... oder ..., weder ... noch ..., nicht..und“, Symbole $\neg , \wedge , \vee , \Leftrightarrow , \Rightarrow$
- Begriff des vollständigen logischen Operatorsystems. Beweis folgender Behauptungen:
  - $\{\neg , \vee , \wedge , \Rightarrow , \Leftrightarrow\}$ ist ein vollständiges System
  - $\{\neg , \vee , \wedge , \Rightarrow\}$ ist ein vollständiges System
  - $\{\neg , \vee , \wedge\}$ ist ein vollständiges System

  „Austauschformeln“ für die wegfallenden Operatoren
- Nachweis der Distributivgesetze $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- Nachweis der DeMorgan'schen Regeln $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$, $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
- Logische Schlussfolgerungen: aus einer Menge von Formeln mit dem Wahrheitsgehalt TRUE soll auf den Wahrheitsgehalt nicht belegter (*Teil*)formeln geschlossen werden

Hausaufgabe. Gegeben $\begin{array}{l} P \Rightarrow (Q \wedge R) \\ Q \Rightarrow S \\ R \Rightarrow T \\ (S \wedge T) \Rightarrow \neg U \\ U \end{array}$. Zuschließen ist, ob P oder $\neg P$ korrekt sind.

b) Aufgaben

a) Beweise: $\{ni\}$ ist ein vollständiges System (weder ... noch ...), $\{nand\}$ ist ein vollständiges System

b) Stellen Sie Wahrheitstabellen für folgende Formeln auf:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow (Q \Rightarrow P) \\ (P \Rightarrow Q) \Rightarrow P \\ \neg((P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)) \end{array}$$

Ersetzen Sie $\Rightarrow , \Leftrightarrow$ durch $(\neg , \vee , \wedge)$ und vereinfachen Sie so weit wie möglich mit Hilfe der ermittelten Umformungsgesetze

c) Gegeben $P \vee Q$, $Q \Rightarrow R$, $\neg R$. Schließen Sie auf P

d) Vereinfache $\neg P \vee (P \wedge Q)$, $(\neg P \wedge Q) \vee \neg(P \, oder \, Q)$, $\neg P \wedge ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$

Mathematik I, 3. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- „Produktionsvorschrift“ für Formeln:

  Formel ::= Atom | ¬ Formel | “(“ Formel º Formel “)“

  Atom ::= Aussage | TRUE | FALSE

  º ::= $\neg|\wedge|\vee|\Rightarrow|\Leftrightarrow$

- Belegung einer Formel $\beta(A_{1,}A_{2,}\cdots A_n)$: allen Atomen werden fest Werte $\in\{0,1\}$ zugewiesen. Bei *n* Atomen existieren 2^n verschiedene Belegungen.
- Bewertung einer Formel (*Auswertung einer Formel*) für eine Belegung: $val_\beta(P)=?$
- Modellmenge einer Formel: $\boldsymbol{Mod}(P)=\{\beta|val_\beta(P)=1\}$
- Spezielle Modellmengen: Tautologien (*immer wahr*): $\boldsymbol{Mod}(P)=\{\beta\}$, Kontradiktion (*immer falsch*): $\boldsymbol{Mod}(P)=\emptyset$
- Tautologien in Verbindung mit $\Leftrightarrow$: Feststellen von äquivalenten Formel. „Umformung“ bedeutet in der Mathematik im Wesentlich den Austausch äquivalenter Terme gegeneinander.
- Schlußfolgern in Verbindung mit $\Rightarrow$: Nachweis der Gültigkeit des Schlusses durch Falsifikation. In $P\Rightarrow Q$ wird *P* als wahr und *Q* als falsch betrachtet und die Formeln in ihre Atome zerlegt, wobei in jedem Schritt den Zwischenprodukten die passenden Wahrheitswerte zugewiesen werden (*Umkehrung der Produktion*). Taucht ein Atom sowohl in der Liste der wahren als auch in der Liste der falschen Atome auf, so ist die Anfangsannahme nicht zu halten und $P\Rightarrow Q$ eine korrekte Folgerung.

Anmerkungen: Die Produktionsvorschriften tauchen im Compilerbau und in formalen Sprachen wieder auf. Die Anzahl der Belegungen hat Bezüge zur „Einführung in die Informatik“. Tautologie- und Äquivalenzbegriffe haben Anfang des 20. Jh. Mathematiker um David Hilbert zu der Frage veranlasst, ob die Mathematik nicht vollständig automatisierbar ist. Die Frage wurde in den 30er Jahren von Kurt Gödel durch den Nachweis, dass eine Maschine unter bestimmten Voraussetzungen nicht das Ziel erreicht, negativ beantwortet. Die Theoretische Informatik geht darauf später noch ein. Die Methode der Falsifikation wurde grundlegend von Karl Popper in den Naturwissenschaften verankert (*war aber schon früher gängiges Werkzeug*). Für die Logik ist die Methode unter dem Namen „Beth-Tableau“ bekannt.

b) Aufgaben

a) Prüfen Sie mit Hilfe der Falsifikation:

$$(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))\wedge\neg(\neg p\vee v)\Rightarrow p\wedge\neg q$$
$$(p\Rightarrow q)\wedge(q\wedge r)\Rightarrow p\wedge q$$

b) Auf einer Insel leben zwei Gruppen von Leuten. Die Mitglieder der einen Gruppe sagen immer die Wahrheit, die der anderen lügen immer. Ihnen begegnen zwei Leute, von denen einer behauptet: „Mindestens einer von uns ist ein Lügner.“ Stellen Sie ein logisches System auf und bestimmen Sie die Zugehörigkeit der beiden zu den Gruppen.

An einer Weggabelung begegnet Ihnen ein weiterer Mann. Sie wissen nicht, in welche Gruppe er gehört. Wie müssen Sie die Frage nach dem weg formulieren, um eine korrekte Antwort zu erhalten.

c) Und hier die Antwort auf unsere Regierungskrise:

Das Leitungsgremium einer gesellschaftlichen (oder ökonomischen) Organisation bestehe aus vier Funktionen, *Präsident, Vizepräsident, Sekretär* und *ökonomischer Direktor,* die unter sechs bereits vorgesehenen Kandidaten A, B, C, D, E, F aufzuteilen sind. Durch persönliche Wünsche der Kandidaten ergeben sich eine Anzahl von Randbedingungen, die möglicherweise nicht miteinander zu vereinbaren sind, so daß das Zustandekommen der Leitung in Frage gestellt ist.

(a) A will nicht ohne B in die Leitung, auf keinen Fall aber Vizepräsident sein.
(b) B will weder Vizepräsident noch Sekretär sein.
(c) C will nicht mit B zusammenarbeiten, falls nicht auch F Mitglied der Leitung wird.
(d) D lehnt es ab, mit E oder mit F zusammenzuarbeiten.
(e) E will dann nicht in die Leitung, wenn A und B dort gleichzeitig Funktionen erhalten.
(f) F will höchstens dann mitarbeiten, wenn ihm der Präsidentenposten angetragen wird, jedoch unter der zusätzlichen Bedingung, daß C nicht Vizepräsident wird.
(g) Die Kandidaten sind sich immerhin darin einig, daß nicht einer von ihnen mehr als höchstens einen Posten übernehmen darf.

Stellen Sie ein logisches System hierfür auf. Suchen Sie nach einer Lösung. Hilfe: F hat außer dem Präsidentenposten alle anderen Ämter ausgeschlossen. Beginnen Sie am Besten mit ihm und prüfen Sie, ob sein Wunsch erfüllbar ist.

Mathematik I, 4. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Starthilfe bei der Übungsaufgabe „Verteilung von 4 Positionen unter 6 Interessenten“:

  Bereitstellen der logischen Variablen $A_1, A_2, \ldots F_{3,} F_4$,

  Formulierung der Forderung „alle Posten vergeben, aber höchstens einen pro Person“,

  Formulierung der Nebenbedingungen von A und B.

  Prinzip: es ist ein System logisch richtiger Formeln aufzustellen (*auch wenn einer keine Position bekommt*) und anschließend nach einer Belegung gesucht, die alle Formeln erfüllt (*siehe Vorlesungsteil „logisches Schließen“*).

- **2. Abschnitt: Prädikatenlogik**
- Ersetzen von einzelnen Konstanten in einer Aussage durch Variable (*z.B. „Die Straße ist nass“ durch „x ist nass“*), symbolisch: $P \rightarrow P(x), P(x, y), \ldots$
- Betrachten der Aussagen, wenn die Variablen eine vorgegebene Menge durchlaufen, z.B. „Straße, Haus, Buch, ..“. Mögliche Fälle:
  - Für alle Elemente ist die Aussage richtig, symbolisch $(\forall x) P(x)$
  - Für mindestens 1 Elemente ist die A. richtig, $(\exists x) P(x)$
  - Für kein Element ist die A. richtig, symbolisch $(\forall x) \neg P(x)$ oder $\neg(\exists x) P(x)$

  Die neuen Symbole werden Quantoren genannt.

- Die Reihenfolge ist bei mehreren Quantoren wichtig: sei P(x,y) die Aussage „x liebt y“, x,y Menschen.

  $(\forall x)(\exists y) P(x, y)$ bedeutet: Für alle Menschen gilt, dass jeweils mindestens ein Mensch existiert, den sie lieben.

  $(\exists y)(\forall x) P(x, y)$ bedeutet: es existiert mindestens ein Mensch, den alle andere lieben.

  Die sprachliche Formulierung einer Formel der Prädiktenlogik ist oft schwieriger als in der Aussagelogik.

- Arbeitsziel: gegeben etwa $(\forall x) P(x, y) \wedge (\exists y) Q(y)$ soll umgeformt werden mit dem Ziel, alle Quantoren vor die logische Formel zu ziehen, also z.B. $(\exists y)(\forall x) \ldots$. Die Form heißt auch Normalform. Dazu sind Umformungsgesetze zu untersuchen.
- Es gilt z.B. $$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x)$$ $$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x) P(x) \vee (\exists x) Q(x)$$

Hausaufgabe: Prüfen Sie: $$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \quad ? \quad (\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x)$$ $$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \quad ? \quad (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

b) Aufgaben

keine

Mathematatik I, 5. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Umformen von Formeln in der Prädikatenlogik, Regeln zum Vorziehen der Quantoren zur Normalform:

  (01) $(\forall x)P(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x)\neg P(x)$
  (02) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$
  (03) $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$
  (04) $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$
  (05) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \Leftarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$
  (06) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$
  (07) $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$
  (08) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$
  (09) $(p \Rightarrow (\forall x)Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(p \Rightarrow Q(x))$
  (10) $(p \Rightarrow (\exists x)Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(p \Rightarrow Q(x))$
  (11) $(\forall x)p(x) \Rightarrow Q \Leftrightarrow (\exists x)(p(x) \Rightarrow Q)$
  (12) $(\exists x)p(x) \Rightarrow Q \Leftrightarrow (\forall x)(p(x) \Rightarrow Q)$

- **3. Mengenlehre und elementare Algebra**

- Mengenschreibweise, Regeln für die Angabe von Elementen von Mengen:Objekte als Elemente, Mengen als Elemente, Aufzählung von Elementen oder Angabe von Bereichsformeln (*Intervallformeln*) für Mengen, bei denen nicht alle Elemente explizit aufgeschrieben werden können.

  Teilmengen: $A \subseteq B : (\forall a \in A) \Rightarrow (a \in B)$

- Mengenalgebra:

  Vereinigungsmenge $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ .Schnittmenge $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

  Distributivgesetze für Vereinigung und Schnitt ist aus den Regeln der Logik ableitbar (*siehe Aufgabe*).

  Differenzmenge: $A - B = A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$,

  Komplementärmenge in Bezug auf eine Grundmenge: $A \subseteq B, \overline{A} = B \setminus A, A \cup \overline{A} = B, A \cap \overline{A} = \emptyset$

  Spezielle Mengen: leere Menge, Potenzmenge $P_A = \{X | X \subseteq A\}$

- Abbildungen zwischen Mengen:

  Relation: $R: A \rightarrow B$, jedem Elemente der Menge A werden Elemente der Menge B zugeordnet. Dies erfolgt durch Paarbildung: $\boldsymbol{R} = \{(a,b) | a \in A, b \in B, a\,R\,b\}$, $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$. a heißt 1. Koordinate der Relation, b heißt 2. Koordinate.

- **Hausaufgabe:** Erklären Sie die Regeln (11) und (12) der Prädikatenlogik anschaulich.

b) Aufgaben

(1) Formen Sie in die Normalform um. Gehen sie Schritt für Schritt vor und notieren Sie, welche der Regeln Sie anwenden:

$$((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)) \Rightarrow C$$
$$(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)B(x)$$

(2) Sei $A = \{1,3,5,f,e,r\}$, $B = \{3,t,f,1\}$. Geben Sie an:

$$A \cup B \;,\; A \cap B \;,\; \overline{A \setminus B}$$

(3) Beweisen Sie mit Hilfe der Aussagelogik:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Prüfen Sie dies mit A,B wie in (2), $C=\{3,5,t,e\}$

(4) Bilden Sie P_B. Versuchen Sie, eine Berechnungsformel zu finden, mit der man $\#P_A$ berechnen kann, sofern $\#A$ bekannt ist ($\#A$ bezeichnet die Anzahl der Elemente einer Menge).

(5) Geben Sie die Mengen sowie die Schnitt- und Vereinigungsmengen folgender verbal beschriebener Mengen in mathematischer Notation an:

a) Die Menge A besteht aus den rationalen Zahlen, die größer als 1 oder kleiner als -1 sind, die Menge B aus den Zahlen die größer als -3 und kleiner als ½ sind.

b) Die Menge A besteht aus den rationalen Zahlen zwischen -5 und +5 unter Einschluss der Grenzen, die Menge B besteht aus den ganzen Zahlen zwischen -5 und +5 unter Einschluss der Grenzen.

Mathematik I, 6. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Beispiele für Relationen
- Funktionen als Sonderform der Relation:

  $f: A \to B \quad : \quad (a,b) \in \boldsymbol{F} \Rightarrow \neg(\exists c)(a,c) \in \boldsymbol{F}$
- Klassifizierung von Relationen:

  $$\begin{aligned}
  &\mathit{reflexiv}: (\forall x)(x,x) \in \boldsymbol{R}\\
  &\mathit{irreflexiv}: (\forall x)(x,x) \notin \boldsymbol{R}\\
  &\mathit{symmetrisch}: (x,y) \in \boldsymbol{R} \Rightarrow (y,x) \in \boldsymbol{R}\\
  &\mathit{asymmetrisch}: (x,y) \in \boldsymbol{R} \Rightarrow (y,x) \notin \boldsymbol{R}\\
  &\mathit{antisymmetrisch}: (x,y) \in \boldsymbol{R} \wedge (y,x) \in \boldsymbol{R} \Rightarrow x=y\\
  &\mathit{transitiv}: (a,b) \wedge (b,c) \Rightarrow (a,c)\\
  &\mathit{intransitiv}: (a,b) \wedge (b,c) \Rightarrow \neg(a,c)\\
  &\mathit{konnektiv}: (\forall x,y)(x,y) \vee (y,x)
  \end{aligned}$$
- Klassifizierung von Funktionen:

  $$\begin{aligned}
  &f: A \to B\\
  &\mathit{surjektiv}: (\forall b \in B)(\exists a \in A)\, b = f(a)\\
  &\mathit{injektiv}: f(a) = f(b) \Rightarrow a = b
  \end{aligned}$$
- bijektiv = injektiv + surjektiv. Für bijektive Abbildungen kann die Umkehrfunktion gebildet werden:

  $y = f(x) \;\to\; x = f^{-1}(y)$
- Verknüpfung von Funktionen:

  $$\begin{aligned}
  &f: A \to B \;,\; g: B \to C \;\Rightarrow\; g \circ f: A \to C, z = g \circ f(x) = g(f(x))\\
  &f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x = \iota x
  \end{aligned}$$
- Besondere Mengen: natürliche Zahlen $\mathbb{N}$, Peano'sche Axiome.
- Operationen: nur Addition und Multiplikation, rekursive Definition:

  $(a+b)' = (a+b') \;,\; (a*b') = (a*b)+a$
- Subtraktion $a-b=x \Leftrightarrow a=x+b$ nicht immer in $\mathbb{N}$ lösbar. Konstruktion der ganzen Zahlen:

  $x=(a,b)$, Bildung eines Zahlenpaares als Lösung

  $z = \{(a+m, b+m), m \in \mathbb{N}\}$, Äquivalenzklasse als „ganze Zahl“, Menge der Äquivalensklassen = Menge der ganzen Zahlen.
- Rechenregeln:

  $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \;,\; (a,b)*(c,d)=(a*c+b*d, a*d+b*c)$

  Wegen $(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)=(a+m-c,b+m-d)$ ist die Subtraktion immer lösbar.

  Verkürzung: $(a,b)=(+(a-b)\,\text{für}\, a \geq b)(-(b-a)\,\text{für}\, a<b)$, und wir sind wieder bei den bekannten Rechenregeln.

b) Aufgaben

(1) Begründen Sie die Formeln (11) und (12) der Prädikatenlogik auf Blatt 5.

(2) Klassifizieren Sie die Relationen „=“, „<“ und „<=“ hinsichtlich Reflexivität usw.

(3) Untersuchen Sie desgleichen:

$$R1=\{(1,1),(2,1),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4),(4,1)\}$$
$$R2=\{(3,4),(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(1,3)\}$$
$$R3=\{(1,2),(2,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,4),(3,3),(4,2)\}$$

(4) Zu einer Äquivalenzklasse einer ganzen Zahl gehört mit (a,b) auch $(a-b,0)$ als positive ganze oder auch natürlich Zahl sowie $(0,b-a)$ als negative Zahl (jeweils für $a>b$ bzw. $b>a$). Weisen sie damit allgemein nach:

a) Die Addition auf $\mathbb{Z}$ für positive ganze Zahlen ist der Addition auf $\mathbb{N}$ äquivalent.

b) Desgleichen für die Multiplikation

c) Weise Sie die Vorzeichenregeln bei der Multiplikation ganzer Zahlen anhand der Definition für Addition und Multiplikation nach:

$$(-a)*(-b)=(+a)*(+b)=+c \quad , \quad (+a)*(-b)=(-a)*(+b)=-c$$

Mathematik I, 7. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Eigenschaften von $(\mathbb{Z},+,*)$:

  $a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a+b\in\mathbb{Z}$
  $\mathit{Neutrales\ Element}\ 0: 0+a=a+0=a$
  $\mathit{Inverses\ Element}\ (-a): a+(-a)=(-a)+a=0$
  $\mathit{Kommutativgesetz,\ Assoziativgesetz}$

  Objekte mit der Summe dieser Eigenschaften heißen (kommutative) Gruppe

  $a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a*b\in\mathbb{Z}$
  $\mathit{Distributivgesetz,\ Assoziativgesetz,\ (Kommutativgesetz)}$

  Objekte mit diesen Eigenschaften bezüglich + und * heißen Ring.

- Die Division ist nicht immer möglich, aber eine Division mit Rest:

  $a:b \ :\ a=c*b+r \ ,\ |b|>|r|$

  Die Betragsfunktion wird vorläufig als bekannt vorausgesetzt und später näher untersucht.

- Erweiterung zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen:
  - das Zahlenpaar $x=\left(\frac{a}{b}\right)$ löst die Aufgabe $a=x*b$ für alle $a,b\in\mathbb{Z}$
  - eine rationale Zahl ist die Äquivalenzmenge $\left\{\left(\frac{a*m}{b*m}\right), m\in\mathbb{Z}\right\}$
  - Addition und Multiplikation werden erklärt durch

    $\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{a*d+b*c}{b*d}\right) \ ,\ \left(\frac{a}{b}\right)*\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{a*c}{b*d}\right)$

- Nun ist wegen

  $\mathit{Neutrales\ Element}\ 1: a*1=1*a=a$
  $\mathit{Inverses\ Element}\ a^{-1}: a*a^{-1}=a^{-1}*a=1$

  $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ auch für die Multiplikation eine Gruppe (die Division durch Null ist nicht definiert).

  Objekte mit Gruppeneigenschaft für Addition und Multiplikation heißen Körper (engl: field).

- Kürzen einer rationalen Zahl durch Division von Zähler und Nenner durch den größten gemeinsamen Teiler $ggT(a,b)$. Berechnung des ggT mittels des euklidischen Algorithmus, Implementation der euklidischen Algorithmus in einer Programmiersprache.

- Der Begriff des Polynoms $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k*x^k$, der Grad eines Polynoms $grad(P)=max(k: a_k\neq 0)$.

  Polynommenge über den rationalen Zahlen: $\mathbb{Q}[x]=\{P(x)|a_k\in\mathbb{Q}\}$

b) Aufgaben

(1) Weisen Sie nach: die Additions- und Multiplikationsregeln sind mit den Regeln für ganze Zahlen verträglich (notwendig wegen $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$).

(2) Berechnen Sie $ggT(2736{,}884)$

(3) Schreiben Sie die Polynome komplett auf:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k * x^k \ : \ a_k = 2*k+1, n=3$$

$$Q(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j * x^j \ : \ b_j = j^2 - 5, m=4$$

$$R(x)=P(x)+Q(x)$$

$$S(x)=P(x)*Q(x)$$

Mathematik I, 8. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Addition von Polynomen:

  $$P(x)+Q(x)=\sum_{k=0}^{max(grad(p),grad(Q))}(a_k+b_k)*x^k$$

  Für den Grad des Ergebnisses finden wird:

  $$grad(P+Q):\{\begin{array}{l}=max(grad(P),grad(Q))\,für\,grad(P)\neq grad(Q)\\ \leq grad(P)\,für\,grad(P)=grad(Q)\end{array}$$

- Mit $\begin{array}{l}neutrales\,Element\,O(x)=0: P(x)+O(x)=O(x)+P(x)=P(x)\\ inverses\,Element(-P(x)): P(x)+(-P(x))=(-P(x))+P(x)=O(x)\end{array}$ und weiteren Eigenschaften folgt: $\mathbb{Q}[x]$ ist bezüglich der Addition eine Gruppe
- Multiplikation von Polynomen: $P(x)*Q(x)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_k b_j x^{k+j}$.

  Implementation von Polynomen mit Addition und Multiplikation auf Computern (Sprache C).
- Division mit Rest: $P(x)=S(x)*Q(x)+R(x)$, $grad(R)<grad(Q)$. $\mathbb{Q}[x]$ ist also wie $\mathbb{Z}$ ein Ring.
- Praktische Ausführung der Polynomdivision.
- Zur Frage: Wann ist $R(x)=0$:
  - Auswertung von Polynomen mittels des Horner-Schemas
  - Nullstelle eines Polynoms: $P(a)=0$ (Berechnungsmöglichkeiten später).
  - Beweis: $R(x)=0 \Leftrightarrow (\forall a)(Q(a)=0 \Rightarrow P(a)=0)$
- Weitere Zusammenhänge zwischen $\mathbb{Q}[x], \mathbb{Z}\,und\,\mathbb{Q}$:
  - Relationentreue Abbildung $f: A\rightarrow B:\ f(a\circ b)=f(a)\circ f(b)$

b) Aufgaben

(1) Berechnen Sie die Summe und das Produkt folgender Polynome:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{3}(2*k+1)*x^k \quad , \quad Q(x)=\sum_{k=0}^{2}(k^2+2k)*x^k$$

(2) Führen Sie folgende Polynomdivisionen durch (jeweils P/Q berechnen):

$$P(x)=x^5+3x^2-7x+2 \quad , \quad Q(x)=x^2+2x-3$$

$$P(x)=x^n-1 \quad , \quad Q(x)=x-1$$

(3) Werten Sie nach Horner für $x=2$ aus:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{5}(2k+3)*x^k$$

Stellen Sie auf dem Papier ein möglichst einfaches Schema zusammen.

Mathematik I, 9. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Definitionen:

  Homomorphismus: relationentreue surjektive Abbildung,

  Isomorphismus: relationentreue bijektive Abbildung,

  Gradfunktion: Abbildung auf die Menge $\mathbb{N}$, $\nu : A \to \mathbb{N}$

  Euklidischer Ring: Ring mit Restdivision $a = c_{1b} + c_2$, für den sich eine Gradfunktion mit $\nu(b) > \nu(c_2)$ finden lässt (Beispiele für ν : Absolutbetrag auf $\mathbb{Z}$, grad(p) für Polynome).

- Wir betrachten $\mathbb{Z}[x]$. Es gilt $\mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ ist ein Ring, aber kein euklidischer, da für die Division $\nu(a) \geq \nu(c_2)$ gilt. Darauf ist bei Divisionen im Weiteren zu achten.

- Abbildung $\sigma_p : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, $x \to p$ $(p \in \mathbb{Z})$ (Beispiel $p = 10$: dies ergibt die normale dezimale Schreibweise von ganzen Zahlen). Die Abbildung ist

  a) eindeutig (jedem Polynom wird eindeutig eine Zahl zugeordnet,

  b) relationentreu,

  c) surjektiv (zu jeder ganzen Zahl existiert ein Polynom),

  d) nicht injektiv ($12\mathrm{x} + 1\, und\ x^2 + 2\mathrm{x} + 1\, werden\, der\, gleichen\, Zahl\, zugeordnet$)

- Schlussfolgerung 1: alle Rechnungen mit ganzen Zahlen lassen sich fehlerfrei auf Computern durchführen.

- Schlussfolgerung 2: Rechenalgorithmen für Zahlen großer Länge sind mit Polynomalgorithmen realisierbar:

  a) wähle ein geeignetes Ziffernsystem, z.B. 0..999

  b) teile alle Ziffern auf ein Polynom mit „int"-Array auf, die größte Ziffer wird der höchsten Potenz zugeordnet.

  c) führe die Rechnung mit Polynomalgorithmen durch (Achtung: bei der Division muss auf die fehlende euklidische Eigenschaft geachtet werden. Das lässt sich jedoch durch Ausnutzen der Mehrdeutigkeit bereinigen).

  d) führe Ziffernüberträge durch, falls notwendig.

- Abbildung $\sigma_k : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Q}$, $x^k \to p^{k-c}$. Damit lassen sich einige rationale Zahlen bei gegebenem c darstellen. Verallgemeinerung: $\mathbb{Q}_p = \{ \cup \sigma_k , k \in \mathbb{N} \}$.

  Es gilt $(q \in \mathbb{Q}_p) \Leftrightarrow (\exists k)(\exists P(x) \in \mathbb{Z}[x])(\sigma_k(P(x)) = q)$

  Zahlen aus $\mathbb{Q}_p$ heißen p-adische Zahlen und entsprechen unserer Komma-Schreibweise

- Wie oben weist man nach: die Abbildung ist eindeutig, relationentreu, aber nicht surjektiv. Beispielsweise gilt: $1/3 \notin \mathbb{Q}_{10}$, $1/3 \in \mathbb{Q}_3$ mit $k = 1$

- Schlussfolgerung: rationale Zahlen sind (von sehr wenigen Ausnahmen abgesehen) auf dem Rechner nicht fehlerfrei darstellbar; alle Rechnungen mit floating-point-Zahlen sind fehlerbehaftet. Dies muss untersucht werden.

b) Aufgaben

(1) Berechnen Sie $1234+3522, 124*231$ mit Hilfe von σ_5 (also mit Hilfe von Polynomen mit Ziffern aus dem 5er-System).

(2) Stellen sie einen Algorithmus für die Division auf, so dass sich mit Hilfe von Polynomen eine Division mit Rest in $\mathbb{Z}$ durchführen lässt

Mathematik I, 10. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Absolutfehler $\Delta = X - x$, Relativer Fehler $\delta = \Delta / X$, Maschinengenauigkeit ϵ
- Fehlerabschätzung bei Rechenoperationen:

  $$x = X_1 * (1+\delta_1) + X_2 * (1+\delta_2) \Rightarrow \delta_{Summe} \leq \frac{|X_1|}{|X_1+X_2|} * \delta_1 + \frac{|X_2|}{|X_1+X_2|} * \delta_2$$

  Das ist unkritisch. Gefahr droht bei Subtraktionen, wenn der Nenner im folgenden Ausdruck sehr klein wird:

  $$x = X_1 * (1+\delta_1) - X_2 * (1+\delta_2) \Rightarrow \delta_{Summe} \leq \frac{|X_1|}{|X_1-X_2|} * \delta_1 + \frac{|X_2|}{|X_1-X_2|} * \delta_2 + \epsilon$$

- Das ist eine Abschätzung des denkbar schlechtesten Falls. Damit sind wir bei Aussagen über die erreichte Genauigkeit aber auf der sicheren Seite.
- Anschauliche Erklärung der Fehlerverstärkung durch Auslöschen von Stellen, Rechenbeispiel dazu.
- Vermeidungs- und Kontrollstrategien für solche Fehler:
  a) Rechenmodelle mit längeren Fließkommazahlen.
  b) Bessere Algorithmen, Beispiel: numerische stabilisierte Form für die Lösung quadratischer Gleichungen.
  c) Zusätzliche Summierung der positiven Werte oder Festhalten des Summenmaximums. Das Verhältnis von positive Summe – Ergebnis bzw. Maximum – Ergebnis ist ein Abschätzungsmaß für den maximalen Fehler.
  d) Intervallarithmetik: Rechnen mit unterer und oberer Intervallgrenze zusätzlich zum durchlaufenden Rechenwert zur Feststellung des Vertrauensbereiches.
- **Reelle Zahlen und komplexe Zahlen**
- Satz mit Beweis: die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl ist dann und nur dann eine rationale Zahl, wenn der Zähler ein Quadrat einer ganzen Zahl und der Nenner ein Quadrat einer ganzen Zahl ist.

b) Aufgaben

(1) Stellen Sie die Fehlerfortpflanzungsformel für die Multiplikation und die Division auf.

(2) Formen Sie folgende Ausdrücke in numerisch stabile Ausdrücke um:

$$\frac{1}{1+2\mathrm{x}} - \frac{1-x}{1+x} \quad \textit{für} \quad x \ll 1$$

$$\sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x - 1 \mathrm{over} x} \quad \textit{für}\, x \gg 1$$

(3) Stellen Sie für die Multiplikation mit Intervallen $[a,b]*[c,d]$ die Rechenregeln für die Ermittlung der Ergebnisintervalle auf. Es gilt stets $a \leq b, c \leq d$. Beachten Sie die verschiedenen möglichen Vorzeichen von a,b,c,d .

Mathematik I, 11. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Erweiterungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$, $z=a+b\sqrt{c}, a, b\in\mathbb{Q}$ löst das Nullstellenproblem $x^2-c=0, c>0$.
  Nachweis der Division mittels konjugierter Ergänzung

  $$\frac{a_1+b_1\sqrt{c}}{a_2+b_2\sqrt{c}}=\frac{a_1+b_1\sqrt{c}}{a_2+b_2\sqrt{c}}*\frac{a_2-b_2\sqrt{c}}{a_2-b_2\sqrt{c}}$$

  Im Nenner bleibt dann nur die rationale Zahl $a_2^2+c\,b_2^2$ übrig.

- Für höhere Wurzeln sind offenbar komplexere Konstruktionen der Zahlen notwendig (*Nachweis an einem Rechenbeispiel für* $x^k-c=0$).

- Durch schrittweise Adjunktion weiterer Nullstellenprobleme von Polynomen aus $\mathbb{Q}[x]$ entsteht eine Vorstufe der reellen Zahlen. Nullstellenlösungen, die keine ganzen Zahlen sind, heißen irrationale Zahlen. Als weitere Komponente der reellen Zahlen treten transzendente Zahlen auf, die nicht Lösungen von Nullstellenproblemen von Polynomen sind (*Keiszahl* π *, Eulersche Zahl e, Potenzreihen*).

  Rechentechnisch ist diese mühsame Konstruktion von $\mathbb{R}$ kein Problem, da immer Näherungen in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{Q}_p$ verwendet werden.

- $\mathbb{R}$ Besitzt keine Lösung für $x^2+1=0$. Wir schaffen dazu auf gleiche Art die komplexen Zahlen $\mathbb{C}=\mathbb{R}(i)$, $i^2=-1$. Rechenregeln siehe $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$

- Geometrische Deutung: komplexe Zahlenebene

- Verschiedene Repräsentationsformen für komplexe Zahlen

  $$z=(a+b*i)=r*(\cos(\phi)+i*\sin(\phi))=r*e^{i\phi}$$

  Trigonometrische Funktionen am rechtwinkligen Dreieck.

  Umrechnung der Darstellungen: $z(a,b)\rightarrow z(r.\phi)$, $z(r,\phi)\rightarrow z(a,b)$

- Beste Form für Addition, Multiplikation, Potenz- und Wurzelrechnung. Geometrische Deutung in der komplexen Ebene.

- Additionstheoreme der trogonometrischen Funktionen, Herleitung anhand der Darstellungen komplexer Zahlen.

b) Aufgaben

(1) Sei $K_2=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gegeben. Erweitern Sie den Körper auf $K_3=K_2(\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Wie sieht die Zahlendarstellung aus?

(2) Versuchen Sie, eine Zahlendarstellung in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ zu finden.

(3) Die Umrechnung von $z(a,b)\rightarrow z(r,\phi)$ erfolgt für ϕ nach der Formel $\phi=\arctan(b/a)$. Wieso ist diese Formel unvollständig. Begründen Sie geometrisch anhand von $z_1=3+4i$, $z_2=-3-4i$.

(4) Zwischen den Darstellungsformen einer komlexen Zahl kann während einer Rechnung beliebig gewechselt werden. Begründen Sie damit $i=e^{i\pi/2}$. Berechnen Sie 1^i , i^i , $\ln(i)$.

Mathematatik I, 12. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Division komplexer Zahlen als Übung in der Vorlesung. Division in der kartesischen Form und unter Umrechnung in die Polarform sowie Rücktransformation.
- GRUNDSÄTZLICH wird in der Mathematik und auf Computern der Winkel im Bogenmaß $0..2\pi$ angegeben. Die Verwendung von $0..360°$ führt zu falschen Ergebnissen! Achten Sie auf die Verwendung der richtigen Einheiten unter den jeweiligen technischen Randbedingungen.
- GRUNDSÄTZLICH: Bei der Berechnung von ϕ ist der Quadrant zu berücksichtigen. Für die Zahlen $z_1=a+bi$ und $z_2=-a-bi$ gilt $|\phi_1-\phi_2|=\pi$! Dies muss bei der Auswertung von $\arctan\phi$ berücksichtigt werden. Verwenden Sie auf Computern daher die Funktion $atan2(a,b)$, die dies macht.
- Die Ausdrücke $e^{i\phi}$ und $e^{i(\phi+2*k*\pi)}$, $k\in\mathbb{Z}$ kennzeichnen die gleiche Zahl auf der komplexen Zahlenebene. Die Darstellung ist also mehrdeutig.
- Mittels der Mehrdeutigkeit weist man nach: alle Zahlen $e^{i2*k*\pi/n}$ mit $k=0..(n-1)$ sind eine Lösung von $x^n-1=0$.
- Aufgrund der verschiedenen Zahlendarstellung gilt $i=e^{i\pi/2}$. Zwischen den Zahlendarstellungen kann frei gewechselt werden. Z.B. folgt damit $i^i=e^{-\pi/2}$.
- **Lineare Algebra, lineare Gleichungssysteme**
- Ein lineares Gleichungssystem mit *m* Gleichungen und *n* Unbekanten wird in allgemeiner Form folgendermaßen geschrieben:

  $$\begin{aligned} a_{11}*x_{+a_{12}}*x_2+...+a_{1n}*x_n&=b_1\\ a_{21}*x_{+a_{22}}*x_2+...+a_{2n}*x_n&=b_2\\ &...\\ a_{m1}*x_{+a_{m2}}*x_2+...+a_{mn}*x_n&=b_m \end{aligned}$$

  Das Gleichungssystem heißt linear, weil die Unbekannten in der 1. Potenz auftreten.
- Abkürzung 1:

  $$\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ ...\\ a_{m1}\end{pmatrix}*x_1+\begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ ...\\ a_{m2}\end{pmatrix}*x_2+...\begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ ...\\ a_{mn}\end{pmatrix}*x_n=\vec{a}_1*x_1+\vec{a}_2*x_2+...+\vec{a}_m*x_n=\vec{b}$$

  Die Spaltentupel heißen Spaltenvektoren oder kurz Vektoren.
- Abkürzung 2:

  $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ .... & ... & ... & ...\\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}\vec{x}=\boldsymbol{A}*\vec{x}=\vec{b}$$

  A heißt Matrix

b) Aufgaben

Keine

Mathematik I, 13. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Regeln für die Modifikation eines lin. GLS, die die Lösung unverändert lassen:
  a) Jede Gleichung kann mit einem beliebigen Faktor $\neq 0$ multipliziert werden.
  b) Zwei Gleichungen können ihre Positionen tauschen
  c) Eine Gleichung kann zu einer anderen Addiert werden.
  d) (Beim Vertauschen zweier Spalten ändert sich die Reihenfolge der Lösungen)
- Idee für die Lösung eines lGLS: die erste Zeile wird so mit einem Faktor multipliziert und von der zweiten abgezogen, dass das 1. Element der 2. Zeile Null wird. Das wird für alle Zeilen wiederholt, anschließend wird mit der 2. und den weiteren Zeilen ähnlich verfahren. Unterhalb der Hauptdiagonale sind alle Koeffizienten 0, und das System kann rückwärts gelöst werden. Bei der Rechnung muss der Lösungsvektor $\vec{b}$ ebenfalls umgewandelt werden.
- Mögliche Fälle $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ als Matrix mit 0 unterhalb der Hauptdiagonale, ***B*** beliebig, ***0*** Null-Matrix:
  a) ***B*** und ***0*** leer: tritt auf bei $n=m(Zeilenzahl=Spaltenzahl)$, es gibt eine eindeutige Lösung
  b) ***B*** leer: tritt auf bei $n>m$ $(Zeilenzahl>Spaltenzahl)$, es gibt eine Lösung, falls $b_k=0, k>m$ nach der Transformation
  c) ***0*** leer: Tritt auf bei $n<m$, einige x_k sind frei wählbar, dadurch unendliche Lösungsmenge
  d) ***B, O*** nicht leer, kann immer eintreten: entweder keine Lösung oder unendliche Lösungsmenge
- Implementation des Gauss-Algorithmus in C, einschließlich Pivot-Suche (= *Zeile mit dem größten jeweiligen Spaltenelement nach oben*). Es ergeben sich 3 geschachtelte for-Schleifen.

Literatur: Falko Lorenz, Einführung in die Lineare Algebra I

b) Aufgaben

(1) Lösen Sie allgemein $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

(2) Untersuchen Sie $\begin{pmatrix} 1+c & 1 \\ 1 & 1-c \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ für $c \ll 1$. Was können Sie über voraussichtliche Rechenfehler sagen.

(3) Stellen Sie Beispiele von lin.GLS für die verschiedenen oben genannten Fälle zusammen. Konstruieren Sie Gleichungssysteme mit einer, keiner oder ∞ vielen Lösungen.

Mathematik I, 14. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Vervollständigung des Gauss-Algorithmus, Ermitteln der Lösung durch
  a) Wiederholen der Elimination für die obere Hälfte der Matrix (ein Sortieren nach größtem Element drf nicht mehr erfolgen),
  b) Berechnen der Lösungen beginnend mit der letzten Zeile und jeweils rückwärts Einsetzen des Ergebnisses in den vorderen Zeilen. Implementation in C
- Werden 2 Zeilen während der Elimination einander sehr ähnlich, kann es zu Rechenfehlern kommen. Dies kann durch Probe erkannt und durch Nachiteration in manchen Fällen verbessert werden:
  $\vec{b}\,' = \boldsymbol{A} * \vec{x}$, $\vec{\delta}_b = \vec{b} - \vec{b}\,'$, $\boldsymbol{A} * \vec{\delta}_x = \vec{\delta}_b$, $\vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{\delta}_x$
- Definition eines Vektorraumes V über einem Körper K , grundsätzliche Begriffsklärung dieser Formulierung. Regeln:
  a) V ist eine Gruppe bezüglich der Addition,
  b) Skalare Multiplikation: $\begin{array}{l} c \in K, \vec{u} \in V : c * \vec{u} \in V \\ (c_1 + c_2) * \vec{u} = c_1 * \vec{u} + c_2 * \vec{u} \\ (c_1 * c_2) * \vec{u} = c_1 * (c_2 * \vec{u}) \\ c * (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = c * \vec{u}_1 + c * \vec{u}_2 \end{array}$
- Vektorräume in diesem Sinne: $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}[x]$ über $\mathbb{Q}$, stetige Funktionen auf einem Intervall, usw.
- Definition von Spaltenvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ und Zeilenvektoren $\vec{w} = (w_1 \dots w_n)$. Vereinbarung: wenn nicht anders vereinbart, ist ein Vektor $\vec{u}$ ein Spaltenvektor und $\vec{u}^T$ ein Zeilenvektor. Addition von Vektoren, skalare Multiplikation von Vektoren.
- Geometrische Deutung von Vektoren. In der Praxis Unterscheidung zwischen Punkten (Ortvektoren) und gerichteten Größen (Vektoren, z.B. Geschwindigkeiten). Beispiel: die Gerade $y = a * x + b$ lässt sich auch durch $\vec{\alpha}(t) = P_0 + t * \vec{\beta}$ formulieren mit einem beliebigen Punkt P_0 der Geraden und einem Vektor β , der in Richtung der Geraden zeigt.
- Definition eines Unterraums U eines Vektorraumes. Direkte Summe von Unterräumen
  $U_1 + U_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 | \vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2\}$. Aus der Definition folgt: die direkte Summe von Unterräumen von V ist ein Vektorraum, $U_1 \cap U_2$ ist ebenfalls ein Vektorraum. Daraus folgt auch:
  $\overline{U} = V \setminus U$ ist wegen $\overline{U} + U = V$ ein Vektorraum.

b) Aufgaben

(1) Geben Sie eine beliebige Vektorform von $y = 5 * x + 3$ an.

Geben Sie umgekehrt $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ in der Form $y = a * x + b$ an.

(2) Ein Schiff fährt mit 20 km/h. Ein Passagier läuft in einem Winkel von $\pi/4$ nach links vorne mit 8 km/h über das Deck. Wie schnell bewegt er sich insgesamt in die Richtung, in die das Schiff sich bewegt? Lösen sie das Problem grafisch und rechnerisch.

Mathematik I, 15. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Ist $M \subset V$, ist die lineare Hülle $Lin(M) = \left\{ \vec{v} \middle| \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{u}_k, \alpha_k \in K, \vec{u}_k \in M \right\}$ ein Vektorraum und Unterraum vom V (oder = V).
- $M \subset V$ ist Basis von V, wenn $Lin(M) = V$ und die Darstellung jeden Vektors aus V als Linearkombination eindeutig ist, d.h. $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{u}_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{u}_k \Leftrightarrow \alpha_k = \beta_k$
- Ist $V = K^n$, so sagen wir auch $dim(V) = n$. Eine Basis für V^n können wir mit Hilfe der kanonischen Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ konstruieren, für deren Komponenten $e_{k,i} = \delta_{ki}$. $\delta_{ki} = \{ \begin{matrix} 1 \; für \; k=i \\ 0 \; für \; k \neq i \end{matrix}$ Ist das Kronecker-Symbol. Die so konstruierte Basis heisst kanonische Basis. Existieren noch andere?
- Eine Menge $M \subset V$ heißt linear unabhängig, wenn $(\vec{v} \in M)(Lin(M \setminus \{\vec{v}\}) \neq Lin(M))$ gilt. Eine äquivalente Formulierung ist $\vec{0} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{u}_k \Rightarrow (\forall k) \alpha_k = 0$. Zusammen mit dem vorhergehenden schließen wir: eine Basis ist eine linear unabhängige Menge von Vektoren.
- Diese Schreibweise führt nun zu folgender Prüfmethode für eine Menge mit *m* Vektoren: $U = (u_1 u_2 \dots u_m)$ ist die Matrix, deren Spalten aus den Basisvektoren besteht. Diese Matrix muss für ein beliebiges inhomogenes Gleichungssystem eine eindeutige Lösung haben, für ein homogenes nur die triviale. Dies können wir durch die Gausselimination prüfen. Ist $m = n$ und besitzt die Hauptdiagonale der Matrix nach der Gausselemination kein Nullelement, so ist M eine Basis von V.
- Die Zeile (oder Spalte), bis zu der die Hauptdiagonale nicht Null ist, heißt Rang von U. M ist Basis, wenn $Rang(U) = dim(V)$

b) Aufgaben

(1) Prüfen Sie, ob $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ Basis von $V = \mathbb{Q}^3$ ist.

(2) Wiederholen Sie den Beweis (Begründung) für die Äquivalenz der Formulierung der linearen Unabhängigkeit ud den Schluss auf die Basiseigenschaft.

(3) Begründen Sie: U_1, U_2 sind Unterräume von V. Dann gilt:

$dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2) - dim(U_1 \cap U_2)$. Geben Sie ein Beispiel dazu an.

Mathematik I, 16. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Wiederholung mit Beispielen: Basen von Vektorräumen
- Definition einer linearen Abbildung:

  $$f: V \to W \qquad \begin{matrix} f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ f(c*\vec{u}) = c*f(\vec{u}) \end{matrix}$$

- Beispiele verschiedener linearer und nichtlinearer Abbildungen. Ankäpfung an früheren Stoff: Surjektivität, Injektivität, Homomorphien, Isomorphien.
- Kern und Bild einer linearen Abbildung, Beispiele dazu:

  $$Kern(f) = \{\vec{v} \in V | f(\vec{v}) = 0\}$$
  $$Bild(f) = \{\vec{w} \in W | (\exists \vec{v} \in V)(\vec{w} = f(\vec{v}))\}$$

- Der kleinste denkbare Kern besteht aus dem Nullvektor $\{\vec{0}\}$. Aus $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$ folgt aufgrund von $f(\vec{v}-\vec{u}) = f(\vec{v}) - f(\vec{u}) = \vec{0}$ $\quad f(\vec{u}) = f(\vec{v}) \Rightarrow (\vec{u}-\vec{v}) \in Kern(f)$. Daraus folgt schließlich wieder

  $$Kern(f) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow f \textit{ ist injektiv}$$
  $$Bild(f) = W \Leftrightarrow f \textit{ ist surjektiv}$$

- Zusammen mit den Eigenschaften einer Basis folgt daraus der Satz: jeder Vektorraum V der Dimension n ist äquivalent zu einem Vektorraum K^n (*in der Vorlesung:* $V \simeq W \Leftrightarrow \# A = \# B$ *mit A,B Basen von V,W*)

b) Aufgaben

(1) Sei $V = \{P(x) | grad(P(x)) \leq 3\}$ ein Vektorraum von Polynomen über $\mathbb{Q}$. Überprüfen Sie:

$F: V \to W \;,\; f(P(x)) = (x^2-1)*P(x)$ ist eine lineare Abbildung. Geben Sie die äquivalente Abbildung $f': \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^m$ im gewöhnlichen Vektorraum an.

(2) Sei $f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1-x_2+x_3 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung. Geben Sie Kern(f) und Bild(f) an.

Mathematik I, 17. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Beweis von $dim(Kern(f))+dim(Bild(f))=dim(V)$: Wir bilden $U=\overline{Kern(f)}$. Dann gilt $U \cap Kern(f)=\emptyset$, $U+Kern(f)=V$, $Bild_U(f)=Bild_V(f)$. Wegen der Einschränkung auf *U* ist $f: U \to W$ ein Isomorphismus, d.h. $dim(U)=dim(Bild(f))$. Mit der Ergänzung von *U* und Kern(f) zu V folgt die Behauptung.
- Bilden der Menge aller Homomorphismen: $Hom(V,W)=\{f | f: V \to W\}$. Dann gilt: $(f_1+f_2)(\vec{u})=f_1(\vec{u})+f_2(\vec{u}) \in Hom(V,W)$ und $f_1 \circ f_2(\vec{u})=f_1(f_2(\vec{u})) \in Hom(V,W)$.
- Wir betrachten die Einschränkung $Hom(V,V)$. Die Menge enthält mit der Nullabbildung *null* und der identischen Abbildung *id* neutrale Elemente für die Addition und die Multiplikation (Verknüpfung). $Hom(V,V)$ ist damit ein Ring, allerdings mit besonderen Eigenschaften:
  - Am Beispiel: im Allgemeinen gilt $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$, d.h. die Multiplikation ist nicht kommutativ
  - Am Beispiel: $(\exists f_1, f_2 \neq null)(f_1 \circ f_2 = null)$. Das Verknüpfungsergebnis kann Null werden, obwohl beide Faktoren nicht Null sind. Der Ring enthält also so genannte Nullteiler.
- Aus der Addition leiten wir für die Addition von Matrizen ab:

  $\vec{y}_1+\vec{y}_2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\vec{x} \Rightarrow (c_{ik})=(a_{ik}+b_{ik})$
- Aus $c*(\vec{y}=\boldsymbol{A}\vec{x})=c(\boldsymbol{A}\vec{x})=\boldsymbol{A}(c*\vec{x})=(c*\boldsymbol{A})*\vec{x}$ folgern wir:

  $c\,\boldsymbol{A}=(c*a_{ik})$
- Der Raum $V=\{\boldsymbol{A} | A\,ist\,Matrix\,mit\,m\,Zeilen\,und\,n\,Spalten\}$ ist damit ein Vektorraum. Die Unterscheidung zwischen Vektoren und Matrizen ist daher nur formaler Natur. Vektoren sind im Prinzip einspaltige oder einzeilige Matrizen.
- Transformationsdiagramme: $\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{A} & K^m \\ \uparrow c_V & & \uparrow c_W \\ V & \xrightarrow[f]{} & W \end{array}$. V wird mittels f auf W abgebildet. Anstelle der direkten Transformation kann in den isomorphen Raum K^n transformiert werden, von dort mittels A nach K^m . Da c_W ebenfalls eine Isomorphie zwischen V-Räumen ist, erhalten wir für den „Umweg“ als Transformationsvorschrift:

  $f=c_W^{-1} \circ A \circ c_V$

  Daraus ergibt sich folgendes „Arbeitsprogramm“: die Multiplikation von Matrizen ist noch nicht definiert, ebenso das Auffinden ggf. vorhandener Inverser. Hierzu beginnen wir mit:
- Seien V, W Vektorräume mit den Basen B und C, sei f eine Abbildung von V nach W. Wir wenden die Abbildung nur auf die Basisvektoren an. Die Bilder der Basisvektoren von V lassen sich als Linearkombinationen der Basisvektoren in W darstellen:

  $f(\vec{b}_i)=\vec{a}_i=\sum_{k=1}^{m} c_{ki}\vec{c}_k$

  Die Matrix (c_{ki}) heißt „Strukturmatrix“ von f bezogen auf die Basis C.

  Beginn mit einem praktischen Beispiel.

b) Aufgaben

(1) Gegeben ist die Abbildungsvorschrift $f: R^3 \to R^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2*x_2+x_3 \\ x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$. Ist $Bild(f)=R^3$? Gibt es eine inverse Abbildung f^{-1} ?

(2) Nach Durchführen der Abbildung aus (1) wird eine zweite Abbildung ausgeführt (Verknüpfung), die zu dem Ergebnis $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2+x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$ führt. Geben Sie die zweite Abbildungsvorschrift an.

(3) Geben Sie Beispiele für Abbildungen im R^3 an, die miteinander verknüpft Nullteilereigenschaften haben

(4) Wir haben festgestellt, dass $\mathbb{C}$ in der Darstellungsform $z=x+y*i$ ein Vektorraum der Dimension 2 über $\mathbb{R}$ ist. Statt (x,y) kann aber auch eine Darstellungsform $z=r+e^{i*\phi}$ mit dem Variablenpaar $(r.\phi)$ verwendet werden. Ist $g:(x,y)\to(r,\phi)$ eine lineare Abbildung?

Mathematik I, 18. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Wow! Voll konkretes Beispiel einer Transformation $R^5 \rightarrow R^4$ mit voll korrektem Basiswechsel. Echt krasse Mitarbeit vieler Kollegas, damit alle das Schnallen. Zum Schluss war's aber doch nur $R^5 \rightarrow R^3$ und nicht nach R^4 - ich schwör, Alter.
- Matrizenmultiplikation durch Kombination von $\vec{z}=\boldsymbol{B}\vec{y}$, $\vec{y}=\boldsymbol{A}\vec{x}$. Die Elemente der Produktmatrix werden gebildet nach der Vorschrift $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * b_{jk}$, d.h. die j-te Spalte der rechten Matrix wird gliedweise mit der k-ten Spalte der linken Matrix multipliziert und das Ganze addiert.
- Der zweite Dimensionsindex der rechten Matrix muss mit dem ersten der linken Matrix übereinstimmen. Für die Dimension des Ergebnisses gilt $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{nl}} * \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{lm}} = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{nm}}$, also bei Betrachtung der Vektoren als einzeilige oder einspaltige Matrizen:

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{nn}} \vec{X}_{n1} = \vec{Y}_{n1}$$
$$X_{1n} * Y_{n1} = c = Zeilenvektor * Spaltenvektor$$
$$X_{n1} * Y_{1n} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{nn}} = Spaltenvektor * Zeilenvektor$$

- Beschreibung des Gausalogorithmus mit Hilfe von Transformationen:
  - $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ hat die Eigenschaft $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} * \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ und wird Einheitsmatrix genannt.
  - Die Gausstranformation lässt sich durch $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{1}} * \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{1}} * \boldsymbol{A}$ beschreiben (1. Schritt, weitere entsprechend), wobei **P** die Zeilenvertauschung vornimmt, **G** die „Nullung“ der Spalte. Für **P** findet man nach kurzer Überlegung (Beispiel in K^4 , tauschen der 1. und 2. Zeile).

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Aufgaben

(1) Stellen sie grafisch dar: $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ im Basissystem der Einheitsvektoren, denselben Vektor im System der Basisvektoren $\left\{\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \vec{b}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ (lesen Sie die Komponenten von $\vec{v}$ in diesem System aus der Grafik ab) sowie den Vektor $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, dessen Komponenten in der 2. Basis angegeben sind.

Mathematik I, 19. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Transformationsmatrix für Spaltenelemination nach Gauss:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... \\ k_1 & 1 & 0 & ... \\ k_2 & 0 & 1 & ... \\ ... & & & \end{pmatrix}$$

- Fortgesetzte Spaltenelemination sowie nachfolgen Zeilenelemination führt zu

  $$K*H_{n-1}*...*H_1*G_{n-1}*P_{n-1}...G_1*P_1*A=E$$

  Die links von A stehende Matrix ist A^{-1} , die inverse Matrix. Man erhält sie, indem alle Schritte der Gauss-Elimination schrittweise an der Einheitsmatrix wiederholt werden. Voraussetzung für eine Invertierung: $A \in K^{n*n}$, $Rand(A)=n$

- Inversenberechnung: $(A_1 A_2 .. A_n)^{-1}=A_n^{-1} A_{n-1}^{-1} ... A_2^{-1} A_1^{-1}$

- Anwendung in der Computergrafik: Vektoren werden i.d.R. nicht im R^3 , sondern im projektiven Raum $P^3=R^4$ dargestellt: $P=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$

- Translation (Verschiebung im Raum): $\vec{v}'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{v}$

  Streckung: $\vec{v}'=\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{v}$

  Drehung um z-Achse: $\vec{v}'=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{v}$ (andere Richtungen entsprechend)

  Die Ableitung der Form Drehmatrix kann beispielsweise anhand der Multiplikation komplexer Zahlen erfolgen.

- Drehung eines enfernten Körpers um eine beliebige Achse: die Achse (und mit ihr alle Punkte des Körpers) wird so verschoben, dass sie durch den Nullpunkt verläuft. Sie wird so gedreht, dass sie in richtung einer der Koordinatenachsen verläuft. Nach Drehung des Körpers um diese Achse erfolgt eine Rücktransformation: $\{' P\}=t^{-1}*r_x^{-1}*r_y^{-1}*d_y(\varphi)*r_y*r_x*t$

- Überleitung zu Determinanten: mit dem reinen Gaussalgorithmus lässt sich eine Matrix bis zu folgender Form reduzieren:

  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & 0 & ... \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$. Ist d eine charakteristische Konstante für A?

b) Aufgaben

(1) $P*A$ tauscht Zeilen gegeneinander. Was ist zu tun, um Spalten zu tauschen?

(2) Entwerfen Sie G^{-1} ($G*G^{-1}=E$)

(3) Eine Drehachse ist um den Winkel ϕ gegenüber der x-Achse geneigt. Eine Punktmenge soll um den Winkel φ um sie gedreht werden. Berechnen Sie die Produktmatrix aller Transformationen.

(4) Der Raum der 2D-Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ist Isomorph zu $\mathbb{C}$. Weisen Sie dies nach!

(5) Betrachten Sie die Diagonalmatrix, die am Ende einer vollständigen Gausszerlegung entsteht. Müssen Spalten und Zeilen eliminiert werden, um in der Diagonale das angegebene Bild zu erhalten oder tritt dieser Fall schon vorher ein?

Mathematik I, 20. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Definition einer Determinantenfunktion: seien $\vec{v}_i$ die Spaltenvektoren einer Matrix. Dann gilt:

  $$det(E)=1$$
  $$det(\vec{v}_1 .. \vec{v}_n)=det(\vec{v}_1 ... \vec{v}_i+\vec{v}_j ... \vec{v}_n)$$
  $$det(\vec{v}_1 ... a*\vec{v}_i ... \vec{v}_n)=a*det(\vec{v}_1 ... \vec{v}_n)$$

- Aus diesen Axiomen lassen sich folgende Schlüsse ziehen (jeweils mit Beweis in der Vorlesung)

  $$det(\vec{v}_1 .. \vec{v}_n)=det(\vec{v}_1 ... \vec{v}_i+a*\vec{v}_j ... \vec{v}_n)$$
  $$det(\vec{v}_1 ... \vec{v}_i ... \vec{v}_k ... \vec{v}_n)=-det(\vec{v}_1 ... \vec{v}_k ... \vec{v}_i ... \vec{v}_n)$$
  $$det(\vec{v}_1 ... \vec{v}_i+\vec{w}_i ... \vec{v}_n)=det(\vec{v}_1 ... \vec{v}_n)+det(\vec{v}_1 ... \vec{w}_i ... \vec{v}_n)$$
  $$det(\vec{v}_1 ... 0 ... \vec{v}_n)=0$$

- Sei nun $\vec{v}_i=\vec{v}_i{}'+a_{ni}\vec{e}_n$ mit Vektoren $\vec{v}_i{}'$ der Dimension (n-1). Dann folgt

  $$det(\vec{v}_1 .. v_n)=a_{n1}det(\vec{e}_1\,\vec{v}_2 ... \vec{v}_n)+... a_{nn}det(\vec{v}_1 ... \vec{v_{n-1}}\vec{e}_n)$$

  Dies führt unter Berücksichtigung der Regeln zu

  $$det_n(A)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}a_{nk}det_{n-1}(A^{(k)}) \quad ,$$

  wobei der $det_n()$ eine Determinate über eine Matrix mit n Zeilen/n Spalten bedeutet, $A^{(k)}$ eine Matrix, in der die n-te Zeile und die k-te Spalte gestrichen worden ist.

- Auf eine 2*2-Matrix angewandt, ergibt sich daraus

  $$det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=a*d-b*c$$

b) Aufgaben

(1) Allgemeiner kann man formulieren:

$$det_n(A)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}det_{n-1}(A^{(ik)}) \quad .$$

Hier wird nach einer beliebigen Zeile zerlegt. Versuchen Sie das anschaulich darzustellen und zu begründen.

(2) Geben Sie die vollständige Zerlegung einer 3*3-Determinante an.

(3) In wieviele Summanden zerfällt eine n*n-Determinante bei vollständiger Zerlegung, aus wie vielen Faktoren besteht jeder Summand?

Mathematik I, 21. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Erläuterung des Berechnungsgangs für eine Determinante, vereinfachtes Schema für 3*3-Determinanten.
- Aufwandsabschätzung: die Berechnung der Determinante einer n*n-Matrix erfordert die Summierung von $n!=1*2*3*...*n$ Summanden, die jeweils aus n Faktoren bestehen. Dieser Aufwand ist bereits bei kleineren Matrizen hoffnungslos zu groß.

  Trotzdem sind Determinanten leicht zu berechnen: nach Zerlegung einer Matrix in eine Dreieickmatrix nach Gauss ist $det(A)=\prod_{i=1}^{n} a_{i\,i}$
- Geometrie: der Wert der Determinante entspricht dem mit positivem oder negativem Vorzeichen versehenen Rauminhalt des von den Spaltenvektoren der Matrix aufgespannten Raumes.

  Ausnutzen zur Berechnung von Flächen. Die Fläche eines Vielecks, das durch die fortlaufend numerierten Eckpunkte P_i gebildet wird, ist $F=\left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} det(P_k\, P_{k+1\, mod\, n})\right|$. Die einzelnen Determinanten werden auch als Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ bezeichnet $F=|\vec{a}\times\vec{b}|$
- Im $\mathbb{R}^3$ besteht die Möglichkeit, die Fläche auf eine der von den Basisvektoren aufgespannten Ebenen zu drehen und dann wie vor zu berechnen. Wir verfolgen diesen Weg einstweilen nicht.
- Definition des Kreuzproduktes im $\mathbb{R}^3$:

  (1) Das Kreuzprodukt $\vec{v}=\vec{a}\times\vec{b}$ ist ein Vektor. Die Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{v}$ verhalten sich bezüglich ihrer Orientierung untereinander wie die Basisvektoren $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$

  (2) Die Länge des Vektors (hier speziell die euklidische Länge $\|\vec{r}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) entspricht dem Flächeninhalt.
- F1: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\ \Leftrightarrow \vec{a}=c\,\vec{b}$

  F2: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

  F3: $\vec{e}_x\times\vec{e}_y=\vec{e}_z,\vec{e}_y\times\vec{e}_z=\vec{e}_x,\vec{e}_z\times\vec{e}_x=\vec{e}_y,$
- Damit erhält man: $\vec{r}_1\times\vec{r}_2=\vec{e}_x(y_1*z_2-y_2*z_1)+\vec{e}_y(z_1*x_2-z_2*x_1)+\vec{e}_z(x_1*y_2-x_2*y1)$

  Für Flächen, die in den Ebenen liegen, ist die Flächenbedingung erfüllt. Für geneigte Flächen begründen wir dies einstweilen nicht weiter.

b) Aufgaben

(1) Die Fläche eines Parallelogramms im $\mathbb{R}^2$ kann man auch aus den Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel berechnen. Stellen Sie diese Berechnungsformel auf und vergleichen Sie mit der 2*2-Determinante.

(2) Eine Fläche im Raum wird durch die Eckpunkte $P_1=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$. Drehen Sie die Figur mit Hilfe einer Drehmatrix auf eine der Grundebenen und berechnen Sie den Flächeninhalt mittels des Kreuzproduktes im $\mathbb{R}^2$. Vergleichen Sie mit einer direkten Berechnung des Kreuzproduktes im $\mathbb{R}^3$

Mathematik I, 22. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Definition der Normfunktion:

$$\|.\|: V \rightarrow R_0^+$$
$$\|\vec{v}\|=0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v}=\vec{0}$$
$$\|c*\vec{v}\|=|c|*\|\vec{v}\|$$
$$\|\vec{v}+\vec{w}\|\leq\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$$

- Untersuchung der Maximumnorm $\|\vec{v}\|:=max(|v_i|)$
- Untersuchung der euklidischen Norm $\|\vec{v}\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}$. Die euklidische Norm erfüllt die Flächenbedingung des Kreuzproduktes (*ohne Nachweis*).
- Näherungsweise Berechnung einer beliebigen Fläche durch „Parkettierung" mit Dreiecken $D=(P_{1,}P_{2,}P_3)$

  Die Menge der Dreiecke muss folgende Prüfbedingungen erfüllen:

$$P_i \neq P_k$$
$$\#\left\{D_j|(P_i, P_k) \in D_j\right\} \leq 2$$
$$(\neg \exists P_{1,} P_{2,} P_{3,} P_4)(P_i \neq P_k)(t*P_1+(1-t)*P_2=t*P_3+(1-t)*P4 \quad , \quad 0<t<1)$$

  Das ist zwar noch keine Garantie für eine korrekt parkettierte Fläche, aber schon mal ein Anfang. Die Fläche ist

$$F=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\|(P_{1,k}-P_{2,k})\times(P_{1,k}-P_{3,k})\|$$

- Aus geometrischen Überlegungen folgt für den von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkel:

$$\cos(\vec{v}, \vec{w})=\frac{\|\vec{v}\times\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|*\|\vec{w}\|}$$

Hausaufgabe: Weisen Sie allgemeingültig nach, dass die euklidische Norm die Bedingungen einer Normfunktion erfüllt.

b) Aufgaben

(1) siehe Hausaufgabe

(2) Prüfen Sie, ob folgende Funktionen die Eigenschaften einer Normfunktion erfüllen:

$$\|r\|=\frac{|r|}{1+|r|} \quad , \quad r\in\mathbb{R} \qquad\qquad \|c\|=\sqrt{c*\bar{c}} \quad , \quad c\in\mathbb{C}$$

Mathematik I, 24. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Konstruktion der Transformation $S^{-1}AS$ durch $S=S_1*S_2*S_3*\ldots$, wobei S_j die Aufgabe hat, ein Matrixelement a_{ik} zu annulieren. Für S_j gilt dann:

  $$s_{ii}=s_{kk}=\cos\varphi \ , \ s_{ik}=-s_{ki}=\sin\varphi \ , \ s_{rt}=\delta_{rt} \textit{ für alle anderen Indixkombinationen}$$

  Die inverse Matrix entsteht durch Vertauschen der Vorzeichen der Nichtdiagonalelemente: $s_{ik}^{-1}=-s_{ik}$

- Berechnung von $\sin\varphi, \cos\varphi$: aus $A'=S^{-1}B \ , \ b=AS$ folgt mit den Eigenschaften der Drehmatrizen

  $$a'_{ik}=\sum_{l=0}^{n} s_{il}^{-1} b_{lk}=s_{ii}^{-1} b_{ik}+s_{ik}^{-1} b_{kk}=c*b_{ik}+s*b_{kk}$$

  Aufarbeiten von b_{ik}, b_{kk} nach dem gleichen Schema führt zu

  $$a'_{ik}=a'_{ki}=-cs(a_{ii}-a_{kk})+(c^2-s^2)a_{ik}=0$$

  Dies ist eine Bestimmungsgleichung für c, s . Division durch c^2 führt auf die quadratische Gleichung $t^2+2\theta t-1=0 \quad mit \quad \theta=\frac{a_{ii}-a_{kk}}{2a_{ik}}$ mit der (numerisch stabilen) Lösung $t=\frac{sign(\theta)}{|\theta|+\sqrt{1+\theta^2}}$.

  Daraus erhält man mit den Eigenschaften von Sinus, Cosinus und Tangens:

  $$c=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ , \ s=t*c$$

- Für die Diagonalelemente erhält man auf die gleiche Weise

  $$a'_{ii}=c^2 a_{ii}+s^2 a_{kk}+2cs\,a_{ik} \ , \ a'_{kk}=s^2 a_{ii}+c^2 a_{kk}-2cs\,a_{ik}$$

b) Aufgaben und Hausaufgabe

(1) Ermitteln Sie, wie die noch nicht untersuchten Matrixlemente transformiert werden.

Mathematik I, 24. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Konstruktion der Transformation $S^{-1}AS$ durch $S=S_1*S_2*S_3*\dots$, wobei S_j die Aufgabe hat, ein Matrixelement a_{ik} zu annulieren. Für S_j gilt dann:

  $$s_{ii}=s_{kk}=\cos\varphi \ , \ s_{ik}=-s_{ki}=\sin\varphi \ , \ s_{rt}=\delta_{rt} \textit{ für alle anderen Indixkombinationen}$$

  Die inverse Matrix entsteht durch Vertauschen der Vorzeichen der Nichtdiagonalelemente: $s_{ik}^{-1}=-s_{ik}$

- Berechnung von $\sin\varphi, \cos\varphi$: aus $A'=S^{-1}B$, $b=AS$ folgt mit den Eigenschaften der Drehmatrizen

  $$a'_{ik}=\sum_{l=0}^{n} s_{il}^{-1} b_{lk}=s_{ii}^{-1} b_{ik}+s_{ik}^{-1} b_{kk}=c*b_{ik}+s*b_{kk}$$

  Aufarbeiten von b_{ik}, b_{kk} nach dem gleichen Schema führt zu

  $$a'_{ik}=a'_{ki}=-cs(a_{ii}-a_{kk})+(c^2-s^2)a_{ik}=0$$

  Dies ist eine Bestimmungsgleichung für c, s . Division durch c^2 führt auf die quadratische Gleichung $t^2+2\theta t-1=0 \quad mit \quad \theta=\frac{a_{ii}-a_{kk}}{2a_{ik}}$ mit der (numerisch stabilen) Lösung $t=\frac{sign(\theta)}{|\theta|+\sqrt{1+\theta^2}}$.

  Daraus erhält man mit den Eigenschaften von Sinus, Cosinus und Tangens:

  $$c=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ , \ s=t*c$$

- Für die Diagonalelemente erhält man auf die gleiche Weise

  $$a'_{ii}=c^2a_{ii}+s^2a_{kk}+2cs\,a_{ik} \ , \ a'_{kk}=s^2a_{ii}+c^2a_{kk}-2cs\,a_{ik}$$

b) Aufgaben und Hausaufgabe

(1) Ermitteln Sie, wie die noch nicht untersuchten Matrixlemente transformiert werden.

Mathematik I, 25. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Fortsetzung des Jacobi-Algorithmus zur Ermittlung von Eigenwerten.

  Für Elemente in den Zeilen/Spalten i,k folgt

  $a'_{ir} = a'_{ri} = s\,a_{ri} + c\,a_{rk}$, $a'_{kr} = a'_{rk} = c\,a_{ri} - s\,a_{rk}$

  Elemente, die außerhalb der Zeilen/Spalten i,k liegen, ändern sich nicht.

- Aus der Quadratsumme $s = \sum_{r=1, r!=i,k}^{n} \left(a_{ri}^2 + a_{rk}^2\right)$ folgt $\sum_{r=1, r!=i,k}^{n} \left(a'^2_{ri} + a'^2_{rk}\right) = \sum_{r=1, r!=i,k}^{n} \left(a_{ri}^2 + a_{rk}^2\right)$, d.h die Summe ist konstant. Da die Elemente a_{ik}, a_{ki} annulliert werden, folgt insgesamt, dass die Gesamtsumme der Nichtdiagonalelemente bei der Transformation abnimmt. Schlechtestenfalls kann in einem Schritt die Hälfte des betragsmäßig zweitgrößten Elementes vor der vorhergehenden Transformation annulliert werden. Die Matrix konvergiert mithin gegen eine Diagonalmatrix, die auf der Diagonale die Eigenwerte enthält.

- Die Eigenvektoren erhält man durch Lösen der zu den Eigenwerte gehörenden homogenen Gleichungssystemen.

- **Bilinearformen**

  Durch die Transponierungsabbildung, bei der Zeilen und Spalten vertauscht sind, erhalten wir den zu einem Vektorraum „dualen“ Raum:

  $A = (a_{ik}) \rightarrow {}^{T}A = (a_{ki})$

  In diesem Raum können alle bisherigen Untersuchungen gewissermaßen „spiegelbildlich“ vorgenommen werden. Z.B. gilt: ${}^{T}(A\vec{x}) = {}^{T}\vec{x}\,{}^{T}A$, ${}^{T}(A*B) = {}^{T}B*{}^{T}A$, $({}^{T}A)^{-1} = {}^{T}(A^{-1})$

- Eine Abbildung $\beta(\vec{x}, \vec{y}) : V \times W \rightarrow K$ heißt bilinear, wenn sie in beiden Variablen linear ist.

  Ein einfaches Beispiel ist $\beta(\vec{x}, \vec{y}) = {}^{T}\vec{x} * \vec{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k * y_k$

b) Aufgaben und Hausaufgabe

(1) Eine Matrix ist wie folgt definiert:

$T_k : t_{rs} = 1 \; für\, r = s$, $! = 0 \; für\, r > k, s = k$, $0 \; sonst$. Schreiben Sie die Matrix symbolisch auf, so dass die Struktur zu erkennen ist.

(2) Leiten Sie die Struktur von $T_i * T_k$ für $i > k$ ab.

Mathematik I, 26. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Die allgemeine Form einer bilinearen Form lautet

  $$f: V \times W \to K: \quad c = \sum_{i,j=1}^{n} v_i B_{ik} w_k$$

  B heißt auch Strukturmatrix der BF und ist der Strukturmatrix bei Raumtransformationen verwandt.

- Für Vektoren $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{e}_i$, $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$ mit den kanonischen Einheitsvektoren folgt $c = \sum_{k=1}^{n} v_i * w_i$, da ${}^T\vec{e}_i \vec{e}_k = \delta_{ik}$. Dies führt uns zu der Definition:

  Zwei Vektoren heißen „orthogonal“, wenn $\beta(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ gilt.

- Bei Übergang von der Basis der kanonischen EV zu einer Basis $B = \left(\vec{b}_1 \vec{b}_2 \dots \vec{b}_n\right)$ folgt durch Einsetzen

  $$\beta(\vec{v}, \vec{w}) = \left(\sum_{v_i} \vec{b}_i\right)^T * \left(\sum_{k=0}^{n} w_k \vec{b}_k\right) = \sum_{i,k=1}^{n} v_i * w_k * \beta(\vec{b}_i, \vec{b}_k) \quad .$$

  Die Matrix B mit den Elementen $b_{ik} = {}^T\vec{b}_i \vec{b}_k$ heißt „Fundamentaltensor“ des Raumes und ist die Strukturmatrix der BL in Bezug auf die Basis B.

- Orthogonalisierung einer Basis nach Schmidt: gegeben ist $B = \left(\vec{b}_1 \vec{b}_2 \dots \vec{b}_n\right)$, zu konstruieren ist daraus eine orthonormale Basis $U = \left(\vec{u}_1 \vec{u}_2 \dots \vec{u}_n\right)$. Einheitsvektoren besitzen die Länge 1, und jeder Vektor ist durch $\vec{v}_n = \vec{v} / \|\vec{v}\|$ normalisierbar. Eine orthonormale Basis besteht aus orthogonalen Einheitsvektoren. Nach Sicherstellung, dass B eine Basis ist, erhalten wir die orthonormale Basis wie folgt:
  - $\vec{u}_1 = \vec{b}_1 / \|\vec{b}_1\|$
  - $\vec{u}_m = \vec{r}_m / \|\vec{r}_m\|$, $\vec{r}_m = \vec{b}_m + \sum_{k=1}^{n-1} c_k * \vec{u}_k$

    Da der neue Vektor zu allen bereits konstruierten orthogonal sein muss, erhalten wir nach Bildung der entsprechenden BF: $\vec{r}_m = \vec{b}_m - \sum_{k=1}^{n-1} \beta(\vec{b}_m, \vec{u}_k) * \vec{u}_k$

- Anschaulich an Beispielen im $\mathbb{R}^2$: der Orthogonalitätsbegriff entspricht demjenigen bei der Diskussion des Vektorproduktes. Der Winkel zwischen den Vektoren ist in der Tat $\pm\pi/2$, sobald die BF verschwindet.

b) Aufgaben und Hausaufgabe

Gegeben ist die Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Bilden Sie eine orthonormale Basis. Berechnen Sie die Komponenten von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der neuen Basis. Berechnen sie $\beta(\vec{u}, \vec{w})$

Mathematik I, 27. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- **Quadratische Form (Definition):** $q(a\vec{x})=a^2 q(\vec{x})$, $q(\vec{x}+\vec{y})-q(\vec{x})-q(\vec{y})=\beta(x,y)$

  Eine quadratische Form ist eine Einschränkung eine allgemeinen bilinearen Form auf einen Raum mit einer Basis. Aus der Definition folgt $q(\vec{x})=1/2\beta(\vec{x},\vec{x})$. Ihre Matrixdarstellung ist $c=\sum_{i,k} x_i a_{ik} x_j$ mit der Strukturmatrix $a_{ik}=\langle \vec{b}_i | \vec{b}_k \rangle$

- Eine positiv semidefinity QF ist: $(\forall \vec{x}\in V)(q(\vec{x})\geq 0)$. Ihre Strukturmatrix in einer orthogonalen Basis ist von der (Diagonal-)Form $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ .. & .. & .. \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ mit $a_{kk}\geq 0$, also auch $det(A)>0$. Bei Übergang zu einer anderem Basis mittels der Transformation S folgt $A'={}^T S\, A\, S$, also $det(A')=c^2 det(A)$. Die Determinate einer p.s.d.q.F. ist positiv.

- Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: für eine p.s.d.q.F. gilt $q(\vec{x},\vec{y})^2 \leq q(\vec{x})q(\vec{y})$ (*Beweis: betrachte* $\vec{x},\vec{y}$ *als Teilbasis von V mit der Strukturmatrix* $\begin{pmatrix} q(x) & q(x,y) \\ q(x,y) & q(y) \end{pmatrix}$ *. Aufgrund der Determinanteneigenschaft folgt sofort die Behauptung*).

- Ein euklidischer Raum ist ein Raum mit einer p.s.d.q.F. und der Norm $\|\vec{x}\|=\sqrt{q(\vec{x})}$

  Lediglich die Dreiecksungleichung bedarf noch einer Untersuchung. In einem allgemeinen euklidischen Raum gilt $\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i,k} x_i a_{ik} x_k}$. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung finden wir

  $$\|\vec{y}+\vec{x}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle\leq\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|=(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2$$

- Definition: $\cos(\vec{x}\,\vec{y})=\frac{\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$. Damit ist auch die Kosinusfunktion definiert, im Gegensatz zur Sinusfunktion beim Kreuzprodukt aber in Räumen beliebiger Dimension und nicht nur im $\mathbb{R}^3$.

- Statt $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle$ schreibt man im $\mathbb{R}^n$ auch $\vec{x}\cdot\vec{y}$ und nennt das Ergebnis „Skalarprodukt" der Vektoren. In Verbindung mit dem Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ entsteht das Spatprodukt, das den Rauminhalt des von den Vektoren aufgespannten verzerrten Quaders angibt: $v=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

b) Aufgaben und Hausaufgabe

(1) Ermitteln Sie eine einfache Berechnungsformel für das Spatprodukt (*Hinweis: blättern Sie ein paar Vorlesungen zurück, dann wird es Ihnen leicht fallen*).

(2) Ermitteln Sie, ob und wie sich das Spatprodukt ändert, wenn die Vektoren die Plätze tauschen (*wie viele Möglichkeiten der Anordnung existieren?*).

Mathematik I, 28. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- **Analysis, Funktionsbegriffe.** I.A. geht es um Funktionen der Form $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oder $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Die Grundmengenangaben sind i.d.R. recht großzügig, so dass zunächst die Einschränkungen $f:D\to B$ zu bestimmten sind mit

  D .. Definitionsmenge = Grundmenge abzüglich der Werte oder Intervalle, in denen die Abbildung nicht definiert ist.

  B .. Bildmenge = Grundmenge abzüglich der Punkte oder Intervalle, die nicht erreichbar sind.

  Beispiele: $y=x^2, y=\sqrt{x}, y=\sin(x)$
- Graph einer Funktion, speziell: Potenzen einer Variable, Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion, Exponentialfunktion. Übungsbeispiel: $y=\sin(x)^2$
- Umkehrfunktion: Auflösen de Funktionsgleichung nach x, graphisch: Spiegeln des Graphen an der Winkelhalbierenden durch den I. und III. Quadraten.

  Nicht alle Funktionen lassen sich eindeutig umkehren. Bei Funktionen wie $x=\sqrt{y}$ muss einer der möglichen Zweige ausgewählt werden.
- Stückweise definierte Funktionen: $y=\begin{cases} f_1(x) \, für\, x \le a \\ f_2(x) \, für\, a < x \end{cases}$
- Gerade (Def: `f(x)=f(-x)`) und ungerade (Def: `f(x)=-f(-x)`) Funktionen. Zerlegung einer beliebigen, in einem geeigneten Intervall definierten Funktion in einen gerade und einen ungeraden Anteil $f_g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ $f_u(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ $f(x)=f_g(x)+f_u(x)$

  Verschiedene Beispiele dazu.
- Erweiterungen zur Vermeidung von Fallunterscheidungen bei Umkehrfunktionen, 1.: implizite Funktion $f(x,y)=0$. Formal ist eine implizite Funktion von der Art $f:\mathbb{R}^2\to\{0\}$. Beispiele: Kreisfunktion
- 2. Punktfunktion: $y=f(x) \Rightarrow \vec{\alpha}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, Beispiele

b) Aufgaben und Hausaufgabe

(1) Bestimmen Sie das Ergebnis von $f=f_a \circ f_b$ mit $\circ\in\{+,*\}$, $a,b\in(g,u)$ in Bezug auf die Eigenschaften „gerade“ bzw. „ungerade“ von f

(2) $f(x)=3*x-1 \; für\, x<0$, $2*x+5 \; für\, x\ge 0$. Skizzieren Sie f(x). Zerlegen Sie die Funktion in gerade und ungerade Anteile. Zeichnen Sie die Einzelfunktionen.

(3) Skizzieren Sie $y=x^{2/3}$, $y=e^{-x^2}$, $y=\sin(x^2)$

Mathematik I, 29. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Jede stückweise zeichenbare Funktion ist in Vektornotation angebbar.

  Beispiele: Spirale, Zykloide

  Im 3D besteht keine andere Möglichkeit, eine Kurve darzustellen.

- Funktionen zweier Variabler $z=f(x,y)$ definieren eine Fläche. Auch für diese Funktionen existieren implizite Formen und Vektorformen.

  Beispiel: Kugel im $\mathbb{R}^3$

- Funktionswerte sehr komplexer und schwer zu berechnender Funktionen werden durch Interpolation gewonnen. Dazu werden einige Punkte berechnet und Zwischenwerte mit einer ähnlich aussehenden, leicht berechenbaren Funktion berechnet. Hierfür verwendet man häufig Polynome oder rationale Funktionen.

- Praxis: $Q_0(x_0, f(x_0)), Q_1(x_1, f(x_1)), ..Q_n(x_n, f(x_n))$ sind (n+1) Punkte, die durch ein Polynom vom Grad n interpoliert werden sollen. Es muss gelten: $P_n(x_k)=f(x_k)$. Das Polynome besitzt (n+1) Koeffizienten, die zu berechnen sind. Ein erster Ansatz führt auf ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & .. & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & .. & x_1^n \\ 1 & .. & .. & .. & .. \\ 1 & x_n & x_n^2 & .. & x_n^n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ .. \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ .. \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

  Wegen der Potenzen sind jedoch bei größeren Werten für n numerische Instabilitäten zu erwarten.

- Ansatz von Lagrange: $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k) * \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$

  Die Lagrange-Polynome $L_{k,n}(x)=\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$ haben die Eigenschaft $L_{k,n}(x_i)=\delta_{ik}$

b) Aufgaben und Hausaufgabe

(1) $Q_0(0,0), Q_1(1,4), Q_2(2,6), Q_3(4,3)$. Berechnen Sie ein interpolierendes Polynom mittels eines linearen Gleichungssystems

Mathematik I, 30. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Satz: Das interpolierende Polynom vom Grad n für (n+1) Punkte ist eindeutig.
- Implementation der Lagrange-Polynome in C-ähnlicher Notation
- Newton-Interpolationsansatz:
  $P(x)=a_0+a_1*(x-x_0)+a_2*(x-x_0)*(x-x_1)+...+a_n*(x-x_0)*(x-x_1)*...*(x-x_{n-1})$

  Zur Berechnung der Koeffizienten wird sukzessive der Grad von (n+1) konstanten, nur die Punkte $P_0..P_n$ interpolierenden Polynomen durch Zusammenlegen benachbarter Polynome bis zum maximalen Grad erhöht.

  Ableitung der Interpolationsformel: sei $P_{a..b}$ ein Polynom, das die Punkte $a..b$ interpoliere. Aufgrund der Eindeutigkeit des Polynoms gilt

  $P_{0..n}=P_{0..n-1}+f_{0..n}(x-x_0)..(x-x_{n-1})=P_{1..n}+f_{0..n}(x-x_1)...(x-x_n)$

  Die Polynome im mittleren und rechten Teil lassen sich konstruieren durch

  $P_{0..n-1}=P_{1..n-1}+f_{0..n-1}(x-x_1)..(x-x_{n-1})$
  $P_{1..n}=P_{1..n-1}+f_{1..n}(x-x_1)..(x-x_{n-1})$

  Nach Einsetzen und Umformen erhält man die Rekusionsformel $f_{0..n}=\dfrac{f_{1..n}-f_{0..n-1}}{x_n-x_0}$

- Interpolation durch rationale Funktionen $Q(x)=\dfrac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{1+\sum_{j=1}^{m} b_j x^j}$. Aus dem allgemeinen Interpolationsansatz erhält man das Geichungssystem $\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = y_i * \left(1+\sum_{k=1}^{n} b_k x_i^k\right)$, $i=1..(n+m+1)$.

  In den meisten Fällen kommt man mit diesem Ansatz aus. Es ist jedoch zu prüfen, ob tatsächlich alle Punkte erreichbar sind.

b) Aufgaben und Hausaufgabe

(1) Stellen Sie das aus der Berechnungsformel resultierende Berechnungsschema für eine Newton-Interpolation auf.

(2) $Q_0(0,0), Q_1(1,4), Q_2(2,6), Q_3(4,3)$ wie im letzten Bericht. Berechnen Sie das interpolierende Polynom mittels Newtoninterpolation.

(3) Interpolieren sie Teile der Funktion $y=\ln(x)$ durch $P=a+bx+cx^2$ und $Q=\dfrac{a}{1+bx}$. Wählen Sie dazu ein Intervall aus (z.B. 0,1 .. 0,5), wählen Sie ausser den Endpunkten eine geeignete Zahl weiterer Punkte im Inneren des Intervalls, um eine Interpolationsfunktion berechnen zu können, und vergleichen Sie anschließend einige weitere interpolierte Werte mit dem Funktionswert. Kommentieren Sie das Ergebnis.

Mathematik I, 31. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Definition Metrik: $$\begin{array}{l} d(,): A \to \mathbb{R}_0^+ \\ d(a,b) \geq 0, d(a,b)=0 \Leftrightarrow a=b \\ d(a,b)=d(b,a) \\ d(a,c) \leq d(a,b)+d(b,c) \end{array}$$

  Eine Metrik beschreibt den „Abstand“ zwischen zwei Größen. Sie ist mit der Norm verwandt (*siehe Aufgabe*). Für uns wichtige Metriken sind:

  $$d(a,b)=|a-b|, \quad a,b \in \mathbb{N}..\mathbb{R}$$

  $$d(a,b)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2}, \quad a \in K^n, \mathbb{C}, ..$$

- Definition Folge: $a_n=(n, a(n))$, $n \in \mathbb{N}$

- Eine Folge besitzt den Grenzwert *a* (konvergiert gegen *a*), $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, wenn für jedes beliebige $\epsilon > 0$ ein *M* existiert, so dass $d(a, a_n) < \epsilon$, $\forall n > M$

  Beispiele: $a_n = \frac{1}{n}$ hat den Grenzwert 0, $a_n = (-1)^n$ hat keinen Grenzwert, $a_n = 2*n$ divergiert (*ist nicht beschränkt, hat den „Grenzwert“* ∞).

- Für konvergierende Folgen gilt: $\lim_{n \to \infty}(a_n+b_n)=a+b$

- Konvergenzordnung: wir betrachten $a_n = \frac{b_n}{c_n}$ mit divergierenden Folgen b_n, c_n . Seien die Folgen von Polynomform $h_n = \sum_{k=0}^{r} f_k * n^k$. Dann gilt $\lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} 0 \text{ für } grad(b_n) < grad(c_n) \\ \infty \text{ für } grad(b_n) > grad(c_n) \\ fb_r / fc_r \text{ für } grad(b_n) = grad(c_n) = r \end{cases}$

  Die Konvergenzordnung von b_n, c_n ist „polynomial mit Ordnung r“.

  Für $b_n \approx n^r, c_n \approx s^n$ folgt $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Die Konvergenzordnung von c_n ist exponentiell.

  Für $b_n \approx s^n, c_n \approx n!$ folgt $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Die Konvergenzordnung von c_n ist proportional zur Fakultät.

- Die Konvergenzordnung beschreibt die „Geschwindigkeit“, mit der die Folgenglieder größer werden. Sie lässt sich durch $a'_n = 1/a_n$ auch für die „Geschwindigkeit“, mit der sich die Glieder der Null nähern, formulieren. Die höhere Konvergenzordnung bestimmt jeweils den Grenzwert, nur bei gleicher Ordnung sind Untersuchungen notwendig.

- Kettenbruchentwicklung einer Quadratwurzel:

  $$\sqrt{7} = 2 + \sqrt{7} - 2 = 2 + \frac{3}{\sqrt{7}+2}$$

  $$2 + \sqrt{7} = 3 + \sqrt{7} - 1 * 3 + \frac{6}{\sqrt{7}+1} ...$$

Die weitere Entwicklung führt zu $$a_n = 2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{6}{\dots}}}} = [(2,3),(3,6),\overline{(2,6)}]$$

Eine Quadratwurzel lässt sich in geschlossener Form als periodischer Kettenbruch angeben. Der Kettenbruch liefert die jeweil beste Näherung durch einen Bruch mit einer vorgegebenen Stellenanzahl im Zähler bzw. Nenner.

- Für solche Folgen funktioniert die Grenzwertdefinition nicht mehr. Mit Hilfe der Metrikdefinition finden wir aber:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 > d(a, a_n) + d(a, a_m) \geq d(a_n, a_m) \quad \mathit{für} \quad n \neq m \quad , \quad \forall n, m > M$$

b) Aufgaben

(1) Weisen Sie nach: Aufgabe 22.(2) beschreibt eine Metrik, aber keine Norm

(2) Berechnen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(2*n-1)}{\sum_{k=1}^{n} 2*n}$. Hilfe: $\sum_{k=1}^{n} k = n*(n+1)/2$.

(3) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n * 5^{-n}$

(4) Geben Sie die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{19}$ an. Berechnen Sie einige Glieder der Entwicklung als Bruch, indem Sie im Nenner den nächsten Bruch streichen und in einen normalen Bruch umrechnen. Es sollte kein besserer Näherungsbruch mit der gleichen Stellenanzahl existieren (Test durchführen). Beurteilen Sie die Qualität der Näherung.

Mathematik I, 32. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Untersuchung von $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$
- Kombinatorische Überlegungen (*wieviele Möglichkeiten existieren, k Faktoren aus insgesamt n Faktoren zu extrahieren, wie viele dieser Möglichkeiten sind nicht zu unterscheiden und damit multiplikative Mehrfachzählungen*) führen zu den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$
- Durch gliedweisen Grenzübergang entsteht damit $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.
- Eine Summe mit unendlich vielen Gliedern heißt REIHE. Besitzt eine Reihe einen Grenzwert, bzw. besitzt die aus Teilsummen einer Reihe gebildete Folge einen Grenzwert?
- Dass die Summenglieder eine Nullfolge bilden, genügt nicht. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k}$ divergiert.
- Minorantenkriterium: eine Reihe, deren Summanden ab einem Index M nicht kleiner sind als die einer divergierenden Vergleichsreihe (*Indizes ggf. anpassen*), divergiert.

  Majorantenkriterium: eine Reihe, deren Summanden ab einem Index M nicht größer sind als die einer konvergierenden Vergleichsreihe (*Indizes ggf. anpassen*), konvergiert.
- Die (Potenz-) Reihe $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a}$, $0 \le a < 1$ konvergiert und ist aufgrund der Konvergenzordnung der Glieder Majorante zu der untersuchten Reihe. Diese konvergiert, der Grenzwert ist die Eulersche Zahl e.
- Aus der Potenzreihe sind zwei Konvergenzkriterien ableitbar:

  Quotientenkriterium: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, Wurzelkriterium: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$. Eine Reihe konvergiert, wenn der Grenzwert < 1 ist, sie divergiert für lim > 1 und bedarf besonderer weiterer Untersuchungen für lim=1.

b) Aufgaben

(1) Begründen Sie das Wurzel- und das Quotientenkriterium.

(2) Beweisen Sie: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Mathematik I, 33. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Ableitung des Wurzel- und Quotientenkriteriums, Anwendungsbeispiele
- Alternierende Reihen: $s=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \quad , \quad a_k \geq 0$

  Alternierende Reihen besitzen einen Grenzwert, wenn ihre Summanden Glieder einer Nullfolge sind (*mit Beweis*).
- **Stetigkeit von Funktionen:** eine Funktion $f(x)$ heißt *stetig* im Punkt $x=a$, wenn $\lim_{\Delta \to 0} f(a+\Delta)=f(a)$ gilt. Konkret: $f(x)$ muss an der Stelle $x=a$ definiert sein und der Funktionswert muss mit dem Grenzwert der Funktion bei (*beliebiger*) Annäherung an *a* identisch sein.
- Beispiel 1: $f(x)=1/x$ ist an der Stelle $x=0$ nicht definiert. Um zu überprüfen, ob ein Grenzwert existiert, untersuchen wir $\lim_{h \to 0} f(0 \pm h) \quad , \quad h>0$. $f(\pm h)$ verschwindet im Unendlichen (*aber in verschiedenen Richtungen*).
- Der Begriff „unendlich“: es existiert genau ein unendlich ferner Punkt. Ein Vorzeichen $\pm\infty$ sagt nur aus, in welche Richtung vom Nullpunkt die Fluchtbewegung verläuft (*mit Herleitung*).
- Beispiel 2: $f(x)=\dfrac{x^2+2\mathrm{x}+1}{x+1}$ ist bei $x=-1$ nicht definiert, jedoch $\lim_{\Delta \to 0} f(-1+\Delta)=0$
- Beispiel 3: $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$
- Beispiel 4: Grenzfunktion. Eine Funktion ist Grenzfunktion, wenn sie Grenzwert in jedem Punkt ist.

  $\lim_{n \to \infty} f_n(x)=f(x) \quad , \quad untersuche: f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^{2n}}$

b) Aufgaben und Hausaufgaben:

Untersuchen Sie die Beispiel 3 und 4 im Detail.

Mathematik I, 34. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = \begin{cases} 0\ \mathit{für}\, |x|>1 \\ 1/2\ \mathit{für}\, |x|=1 \\ 1\ \mathit{für}\, |x|<1 \end{cases} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \exp(-nx^2) = \begin{cases} 0\ \mathit{für}\ x\neq 0 \\ 1\ \mathit{für}\ x=0 \end{cases}$

  Trotz stetiger Funktionen in der Funktionenfolge sind die Grenzfunktionen nicht überall stetig. Die Funtion $f_n(x,k,r) = \frac{1}{1+(k*x+r)^{2n}}$ liefert als Grenzfunktion Rechtecke beliebiger Breite mit beliebigem Mittelpunkt. Solche Funktionen spielen in der Theorie der Faltungen, Filterungen und Abtastungen eine wichtige Rolle.

- Untersuchung von $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ und $f(z) = \frac{1}{z-a}$, $z\in\mathbb{C}$. Funktion 1 ist beschränkt, aber ohne Grnezwert bei x=y=0, Funktion 2 unbeschränkt, aber je nach Annäherung verschwinden Real- und Imaginärteil im Positiven oder im Negativen.

- Intervallschachtelung: eine irrationale Zahl *r* kann durch

  $(u_{0,}o_0),(u_{1,}o_1),\ldots(u_n,o_n),\ldots$, $u_n<r<o_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} o_n-u_n=0$ genähert werden.

  Die irrationale Zahl 1_+ wird so definiert durch $u_n=1, o_n=\frac{n+1}{n}$. Damit lässt sich eine Funktion, die in keinem Punkt stetig ist, erzeugen:

  $f(x) = \begin{cases} 1\ \mathit{für}\, x\in\mathbb{Q} \\ 0\ \mathit{für}\, x\in IR \end{cases}$

  Beweis: in jeder ε-Umgebung von *x* (beliebig rational oder irrational) sind $x'\in\mathbb{Q}$ zu finden, mindestens aber auch eine irrationale Zahl (*nämlich* $x*1_+$). Es existiert als kein Grenzwert.

- Zwischenwertsatz: eine auf $[a,b]$ stetige Funktion mit o.B.d.A. $y_a=f(a)<y_b=f(b)$ Nimmt jeden Wert $y_a\le y\le y_b$ mindestens einmal im Intervall an.

  Beweis: berechne $y_c=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Bei $y=y_c$ ist nichts weiter zu zeigen, bei $y_c<y$ ersetze *a* durch den Intervallmittelpunkt und $y_a=y_c$, bei $y_c>y$ verfahre entsprechend mit *b*. Nach n Teilungen hat das Intervall die Breite $\Delta x=1/2^n*(b-a)$ und strebt damit bei fortgesetzter Teilung gegen Null. Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit strebt $f(x)$ gegen den gesuchten Wert y

- Maximumsatz: jede auf einem Intervall $[a,b]$ stetige Funktion ist beschränkt.

  Beweis: Annahme des Gegenteils, d.h. o.B.d.A. es existiert kein Maximum. Berechne $y_c=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ und setze ε so, dass $\forall x_{1,}x_2\in I: |f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$ für eines der Halbintervalle gilt. Teile das andere Intervall, das offenbar kein Maximum enthält, erneut und wähle ein entsprechendes ε . Bei Fortsetzung des Verfahrens geht die Intervallbreite gegen Null und aufgrund der Stetigkeit ist auch ε beschränkt. Widerspruch!

- Fixpunktsatz (Banach): eine auf $[a,b]$ stetige Funktion mit

  $(\forall x,y\in[a,b]): |f(x)-f(y)|<\alpha|x-y|$, $\alpha<1$

  besitzt im Intervall einen Fixpunkt $x=f(x)$

Beweis: setze $x_{n+1}=f(x_n)$. Dann folgt:

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|<\alpha|x_n-x_{n-1}|=\ldots<\alpha^n|x_1-x_0|$$

Aus $\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$ folgt die Behauptung.

b) Aufgaben

(1) Ergänze den letzten Satz: im Intervall existiert nur ein Fixpunkt (*Hilfe: nehme an, es existieren zwei verschiedene Fixpunkte, und setze in die Kontraktionsbedingung ein*).

(2) Prüfe: $x_{n+1}=1/2*(x+c/x)$ kontrahiert im Intervall $x>c>0$. Nehme ein *c* und iteriere.

Mathematik I, 35. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

-

b) Aufgaben

(1) Ergänze den letzten Satz: im Intervall existiert nur ein Fixpunkt (*Hilfe: nehme an, es existieren zwei verschiedene Fixpunkte, und setze in die Kontraktionsbedingung ein*).

(2) Prüfe: $x_{n+1}=1/2*(x+c/x)$ kontrahiert im Intervall $x>c>0$. Nehme ein *c* und iteriere.

Mathematik I, 36. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Kettenregel: $(f \circ g(x))' = f'(g) * g'(x)$. Wichtig: die „äußere“ Funktion wird nach der „inneren“ abgeleitet, nicht nach x! Beweis mit Hilfe der Definition der Ableitung.
- Für invertierbare Funktionen gilt: $f'(x) = \frac{1}{f^{-1}{}'(y)}$. Beweis mit Hilfe der Definition der Ableitung.
- Ableitungsregeln der wichtigsten Funktionen:

  $f(x) = c \;\Rightarrow\; f'(x) = 0$

  $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; f'(x) = n * x^{n-1}$. Aufgrund der Summenregel genügt dies für die Ableitung von Polynomen.

  $f(x) = \ln(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{x}$. Beweis mit Hilfe der Grenzwertformel für e.

  $f(x) = e^x \;\Rightarrow\; f'(x) = e^x$. Beweis mit Logarithmus und Invertierungsregel.

  $f(x) = x^r, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\Rightarrow\; f'(x) = r x^{r-1}$. Beweis mit Exponentialfunktion und Kettenregel
- $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{h(x)^2}$. Beweis mit Produktregel, Kettenregl und allgemeiner Potenz.

b) Aufgaben

(1) Bilde die Ableitungen folgender Funktionen:

$$f(x) = \frac{6x^3 + 14x^2 + 12x + 28}{3x + 7}$$

$$f(x) = \ln(\ln(x))$$

$$f(x) = \sqrt{x^3}$$

$$f(x) = g(x)^{h(x)}$$

Mathematik I, 37. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Ableitung: $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$. Beweis mit Hilfe der Additionstheoreme sowie einer Ungleichung für die Auswertung von $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$
- Ableitung: $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos(x)^2}$, Beweis mit Hilfe der „Quotientenregel"
- Ableitung: $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, Beweis mit der „Inversenregel"
- Konstruktion von Kurven mit Hilfe der Ableitungen am Beispiel $\sin(x)$. Um beliebige Werte der Funktion zu ermitteln, ist lediglich eine genaue Kurve im Intervall $[0, \pi/2]$ notwendig, da

  $$\begin{aligned}
  &\sin(x) = -\sin(-x) \quad \textit{Elimination des Vorzeichens}\\
  &\sin(x) = \sin(x \mathit{mod}\, 2\pi) \quad \textit{Rückführung auf } 1.\ \textit{Periode}\\
  &\sin(x) = \sin(x) * (-1)^{(x>\pi)} \quad \textit{Rückführung auf } 1.\ \textit{Halbperiode}\\
  &\sin(x) = \sin(\pi - x) \quad \textit{Rückführung auf } 1.\ \textit{Viertelperiode}
  \end{aligned}$$

  Konstruktion: Berechnen einiger Punkte, zeichnen der Steigungsgeraden in den Punkten, Verbinden der Punkte mit den Steigungsgeraden als Tangenten.
- Ableitungen und Skizzen der Funktionen $f(x) = \sin(x^2)$ und $f(x) = \sin(x)^2$

b) Aufgaben

(1) Bilde die Ableitungen folgender Funktionen:

$$f(x) = \arcsin(x) \ , \ f(x) = \ln(\sin(x^2)) \ , \ f(x) = e^{x^2+2x+3} \ , \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Mathematik I, 38. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Wiederholung: Differentiationsregeln (Summenregel, Produktregel, Kettenregel, Quotientenregel, Invertierungsregel) und ihre Anwendung, Umformung von Ausdrücken, Ableitung der wichtigen einfachen Funktionen (Polynom, Exponentialfunktion, Logarithmus, trigonometrische Funktionen) mit Beispielen.

  Anleitung für weitere Übungen.
- Die Stetigkeit einer Funktion auf einem Intervall ist notwendige Voraussetzung für die Differenzierbarkeit, aber keine hinreichende Bedingung. Beweis mittels zweier Beispielfunktionen, Verdeutlichung an den Funktionsgraphen.
- Monotonie: aus der Definition der Monotonie und der Ableitung folgt unmittelbar: eine Funktion ist auf einem Intervall monoton, wenn sich das Vorzeichen der Ableitung nicht ändert. Verdeutlichung an einem Beispiel.
- Extrema: aus der Definition der Monotonie folgt notwendigerweise: wenn eine Funktion in einem Intervall ein Extremum aufweist, das nicht mit einer Intervallgrenze zusammenfällt, so hat die Ableitung an dieser Stelle den Wert Null.

  Der Umkehrschluss gilt allerdings nicht (Untersuchung folgt noch).

b) Aufgaben

Mathematik I, 39. Vorlesung

a) Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- Satz von Rolle: sei $f(x)$ differenzierbar auf $[a,b]$. Dann existiert mindestens ein $c\in[a,b]$, so dass gilt $f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

  Beweis: Zerlegung in $f(x)=g(x)+(m*x+n)$ mit $m*a+n=f(a)$, $m*b+n=f(b)$. Der Satz folgt dann durch Anwendung des Maximumsatzes für stetige Funktionen und der Ableitung an Extrema.

- Für ein Extremum ist $f'(x)=0$ notwendige Voraussetzung, jedoch ist dies nicht hinreichend. Schneidet $f'(x)$ die X-Achse, handelt es sich um ein Extremum (Begründung über Monotonie der Funktion in einer Δ-Umgebung der Nullstelle), berührt sie die X-Achse nur, handelt es sich um einen Sattelpunkt.

  Wir können mit höheren Ableitungen $f''(x)=(f'(x))'$ weiter argumentieren:

  $$f''(x)\neq 0 \Rightarrow f'(x)\,monton \Rightarrow f'(x)\,Nulldurchgang \Rightarrow f(x)\,Extremwert$$

  $$f''(x)=0\,Nulldurchgang \Rightarrow f'(x)\,Extremum \Rightarrow f(x)\,Sattelpunkt$$

  $$f''(x)=0\,Extremum \Rightarrow f'(x)\,monoton \Rightarrow f(x)\,Extremum$$

  Entsprechend kann weiter verfahren und aus höheren Ableitungen eine Regel gewonnen werden (siehe Aufgabe).

- Nullstellenermittlung: das Finden eines Intervalls mit Nullstellen und das Bestimmen der Nullstellen sind zwei unterschiedliche Probleme.

  Berechnung von Nullstellen nach dem Bisektionsverfahren. Voraussetzung: echter Nulldurchgang und $sign(f(a))=-sign(f(b))$:

  - berechne $c=(a+b)/2, f(x)$
  - $f(c)=0$: Ziel erreicht
  - für $sign(f(a))=sign(f(c))$ setze $a=c$, wiederhole
  - für $sign(f(b))=sign(f(c))$ setze $b=c$, wiederhole

  Da bei jedem Schritt die Intervallbreite halbiert ist, ist bei Rechnung mit dem Datentyp „double" nach 52 Schritten Schluss, da dann nach Maschinengenauigkeit $a=b$ gilt.

- Nulldurchgangserzwingung bei Polynomen: $P(x)=(x-a)^n*Q(x), Q(a)\neq 0$. Dann ist $P'(x)=n(x-a)^{n-1}*Q(x)+(x-a)^n*Q'(x)=(x-a)^{n-1}*(Q(x)+(x-a)*Q'(x))$. Für den Quotieten folgt: $P(x)/P'(x)=(x-a)*S(x)+R(x)$. Der Quotient hat also die gleichen Nullstellen wie P(x), aber alle Nullstellen sind einfach und schneiden die X-Achse, so dass das Bisektionsverfahren angewendet werden kann.

b) Aufgaben

Wiederholen Sie die Beweise. Üben Sie für die Prüfung. Schöne Weihnachten und bis zum nächsten Semester.

Mathematik I, Klausur für Bachelor-Studiengang

Prof. Dr. Gilbert Brands

Beachten Sie folgende Hinweise: Geben Sie die Lösungen zusammenhängend ab (*möglichst ein Blatt pro Aufgabe*). Lösungsteile einer Aufgabe, die durch Lösungsteile anderer Aufgaben voneinander getrennt sind, werde ich nicht zusammenführen. Der Lösungsverlauf muss deutlich erkennbar sein. Ein wildes Durcheinander von Formeln ohne Zusammenhang werde ich nicht bewerten. Die einzelnen Rechenschritte sind zu begründen. Nur Formeln oder Zahlen, ohne dass zu erkennen wäre, woher Sie das haben, sind unzureichend. Führen Sie ggf. eine Probe durch, um die Richtigkeit eines Ergebnisses sicherzustellen. Alle Rechnungen sind, sofern es sich nicht um ganze Zahlen oder simpelste Brüche handelt, mit 3 Dezimalstellen auszuführen.

In der Klausur sind 150 Punkte zu erreichen. Für das Bestehen der Klausur sind 55 Punkte notwendig, für die Bestnote 1.0 sind 105 Punkte zu erreichen.

Aufgabe 1:

a) Folgende Aussagen sind wahr: $p \vee (q \wedge r)$, $(p \vee q) \Rightarrow (s \vee t)$, $\neg t \wedge \neg p$. Prüfen Sie, ob dann auch $r \wedge s$ eine wahre Aussage ist.
b) Folgende Aussagen sind wahr: $\neg p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow (s \vee t)$, $s \Rightarrow \neg r$, $p \Rightarrow \neg t$. Prüfen Sie, ob dann auch $t \Rightarrow q$ eine wahre Aussage ist.

Hilfe: Nummerieren Sie die Formeln. Sie können dann nacheinander leicht ihre Schlußfolgerungen dokumentieren und begründen.

17 Punkte

Aufgabe 2:

a) Gegeben ist die Menge $A = \{n | n = 3*k+4 \;,\; 1 < k < 5, k \in \mathbb{N}\}$. Geben Sie alle Elemente der Menge sowie ihr Potenzmenge an.
b) Die Menge A besteht aus den ganzen Zahlen kleiner als 5 und den rationalen Zahlen größer als 5, die Menge B aus den rationalen Zahlen zwischen -1 und +10 (einschließlich). Geben Sie die Mengen und ihren Durchschnitt in mathematische Schreibweise an.

Hinweis: ich erwarte mathematische Notation, nicht die Angabe einzelner Zahlen!

10 Punkte

Aufgabe 3:

a) $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 4$, $Q(x) = x^2 - 3x$. Führen Sie eine Polynomdivision durch und geben Sie S(x) und R(x) in $P(x) = S(x) * Q(x) + R(x)$ an.
b) Wann gilt $R(x) = 0$? Begründen (*beweisen*) Sie diese Aussage.
c) Erläutern Sie, wie mit Polynomen aus $\mathbb{Z}[x]$ Rechnungen mit ganzen Zahlen durchgeführt werden können und demonstrieren Sie durch anhand des Beispiels 38*77.
d) Ein Interpolationspolynom nach Newton wird folgendermaßen formuliert:
$$P(x) = a_0 + a_1 * (x - x_0) + a_2 * (x - x_0) * (x - x_1) + .. + a_n * (x - x_0) ... * (x - x_{n-1})$$
Diese Formel ist für Programmierzwecke ungeeignet. Formulieren Sie die Formel mit Hilfe von Summen- und Produktzeichen, so dass eine direkt Umsetzung in for-Anweisungen gegeben ist.

20 Punkte

Aufgabe 4:

Berechnen Sie alle Lösungen von $z^3 + (7 + 4*i) = 0$ in kartesischen Koordinaten.
Hinweis: geben Sie an, wie Sie Umrechnungen durchführen und wie Sie auf bestimmte Werte kommen.

18 Punkte

Aufgabe 5:

a) Lösen Sie das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} * \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + x_3 - 2 * x_4 \\ -x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. Geben Sie $Kern(f)$ an. Ist f surjektiv?

c) Eine Matrix ist wie folgt definiert: die Elemente der Hauptdiagonale enthalten den Wert 1, die Elemente der k-ten Spalte enthalten unterhalb der Hauptdiagonal Werte ungleich Null, alle anderen Elemente sind Null. Die Matrix sei durch $\boldsymbol{T_k}$ symbolisiert.
   (1)Übersetzen sie die Beschreibung in mathematische Notation für die Matrixelement t_{rs} der Matrix.
   (2)Ermitteln Sie die mathematische Beschreibung der inversen Matrix $\boldsymbol{T_k^{-1}}$.

Hilfe: beachten Sie bei der letzten Aufgabe, für was diese Matrizen benötigt werden. Die Ermittlung der Inversen ist dann einfacher als mit dem Standardverfahren aus der Vorlesung und den Übungen.

28 Punkte

Aufgabe 6:

Der Punkt $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ soll um den Winkel $\pi/4$ um eine Achse gedreht werden, die in der xy-Ebene liegt und mit der x-Achse den Winkel $\pi/3$ einschließt. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes nach der Drehung.
Hinweise: alle Winkel sind im mathematischen Sinn zu interpretieren, d.h. bezogen auf die x-Achse bzw. den Ausgangspunkt entgegen dem Uhrzeigersinn. Führen Sie die Rechnung mit 3 Dezimalstellen durch.

22 Punkte

Aufgabe 7:

a) Berechnen Sie die Fläche des Vierecks, das durch die Eckpunkte $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ gegeben ist (die Punkte sind in dieser Reihenfolge miteinander verbunden).

b) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks, das durch die Eckpunkte $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ festgelegt ist.

c) Seien P_1, P_2, P_3 3 beliebige Punkte im $\mathbb{R}^3$, dann gilt $P_1 * (P_2 \times P_3) = \pm P_2 * (P_3 \times P_1)$. Bestimmen Sie das Vorzeichen!

20 Punkte

Aufgabe 8:

Leiten Sie folgende Funktionen ab (der Weg muss ersichtlich sein; geben Sie die jeweils angewandten Ableitungsregeln an):

$f(x) = \ln(\sin(x))$, $f(x) = x^x$, $f(x) = \arctan(x)$

15 Punkte

Klausurergebnis

In dieser Klausur waren 150% zu erreichen, d.h. für eine 1.0 waren nur 2/3 der Aufgaben zu lösen. Dieser Überhang soll das Bestehen erleichtern, da dann Aufgaben, zu denen keine Lösungsideen vorhanden sind, einfach fortgelassen werden können. Ergebnis:

1.0-1.3	3,4%
1.7-2.3	1,7%
2.7-3.3	6,8%
3.7-4.0	10,2%
5	77,9%

Die nicht bestandenen Klausuren sind in den meisten Fällen sehr deutlich daneben, d.h. es wurden 25% und weniger der notwendigen Punkte erreicht.

Die Klausur war durch Übungen, spezielle Klausurvorbereitungsaufgaben und eine Klausurvorbesprechung so vorbereitet, dass sie außer in Fällen schwerster Schulschädigung ohne weiteres bestanden werden konnte. Bereits in den Übungen zeichnete sich jedoch eine massive (schulbedingte?) Verweigerungshaltung ab, indem die Aufgaben nicht bearbeitet wurden oder den Arbeitsanleitungen nicht gefolgt wurde.

Beispiele: die Ableitung der Funktion $y=x^x$

- wurde in der Vorlesung vorgeführt
- war Gegenstand der Übungen
- war Gegenstand der Klausurvorbereitungsaufgaben
- wurde in der Klausurvorbesprechung ausdrücklich nochmals erwähnt
- war Klausuraufgabe (und wurde trotz der Vorbereitung größtenteils unsinnig „gelöst“).

Bei einer Wiederholungskontrolle zu Beginn des neuen Semesters lieferten wiederum mehr als 80% die falsche Lösung ab, d.h. ein Nachbearbeiten des Stoffs in den Semesterferien hat nicht stattgefunden.

Ähnliches gilt für komplexe Zahlen: trotz Auftretens in jeder 2. Veranstaltung setzt beim Nennen des Begriffs ein hektisches Blättern in der Formelsammlung ein, um Nachzuschlagen, was denn eine komplexe Zahl ist.

Eine Umfrage zu Beginn des Sommersemesters zeigte dann

- (fast) keiner hat die Semesterferien dazu genutzt, die Lücken zu schließen und den Stoff nachzuholen,
- fast jeder ist der Meinung, trotz des schlechten Abschneidens im ersten Semester genügend Aufwand getrieben zu haben und im 2. Semester daher nichts verändern zu müssen,
- fast jeder ist der Meinung, trotz Beibehalten der Arbeitseinstellung des 1. Semesters beide Klausuren bestehen zu können,
- viele sind der Meinung, dass seitens der Lehrenden aufgrund der schlechten Ergebnisse das Niveau deutlich nach unten angepasst wird.

Vergleiche zu diesem Thema auch weitere Dokumente.

Mathematik II, 1. Vorlesung

Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

- „l'Hospital'sche Regel“ zur Ermittlung von Grenzwerten:

  $$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \quad , \quad g(a)=h(a)=0 \quad , \quad \lim_{x\to a} f(x)=?$$

  $$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{h'(x)}$$

  Die Ableitungen sind ggf. an der Stelle $x=a$ nicht beide Null oder ∞, so dass der Grenzwert berechenbar ist. Die Formel gilt nur für Ausdrücke der Form $(0/0)$!

- Der Begriff des Differentials. dx ist eine freie Variable über der Variablen x. Man denke sich *x* fixiert auf einen beliebigen Wert, dann ist *dx* ein beliebiger Variationswert an der Stelle *x*.

- Ist $y=f(x)$ und sind dx, dy Differentiale über x, y, so ist dy vermöge der Funktionsgleichung nicht mehr frei. Der Zusammenhang zwischen dx, dy ist linear und definiert durch

  $$\frac{dy}{dx}=f'(x) \quad .$$

- Geometrische Deutung: dx, dy sind die Katheten des Steigungsdreiecks.

- Historische Anmerkung: die Differentialrechnung wurde im 17. Jh von Newton führend entwickelt. Aufgrund der damaligen philosophischen Vorstellungen konnte der Grenzwertbegriff noch nicht als werkzeug entwickelt werden, so dass Newton auf endliche Größen zurückgreifen musste, eben die Differentiale. Mit der Entwicklung der Grenzwerttheorie mi 19. Jh. wurde die heutige Lehrmethode entwickelt. Der „Rückschritt“ auf das sehr mächtige Werkzeug der Differentiale macht dabei heute oft die gleichen gedanklichen Probleme wie Newton seinerzeit das Konzept von Grenzwerten.

Aufgaben

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

Lagrange-Polynome, Newton'sche Polynome (Mathematik I, 29. Vorlesung)

Untersuchen Sie folgende Funktionen mit Hilfe der l'Hospital'schen Regel:

$$f(x)=\frac{\sin(x-1)}{\ln(x)} \quad \textit{für} \quad x\to 1$$

$$f(x)=x*\ln(x) \quad \textit{für} \quad x\to 0$$

$$f(x)=\frac{\exp(-1/x)}{\sin(x)} \quad \textit{für} \quad x\to 0$$

2. Vorlesung

Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

Nachweis der „Distributivgesetzte“ für Differentialoperatoren:

$$d(u+v)=du+dv$$
$$d(u*v)=u*dv+v*du$$
usw.

Differentiale höherer Ordnung:

$$d(df)=d^2 f=f''(x)dx \quad , \quad usw.$$

Eine Funktion $z=f(x, y)$ mit 2 unabhängigen Variablen induziert eine Fläche im Raum. An eine Fläche lässt sich in Analogie zu einer Kurve eine Tangentialebene anlegen, die durch zwei Vektoren aufgespannt werden kann. Die Richtungen der Vektoren erhält man zweckmäßigerweise aus den Tangenten an die Fläche in X- oder Y-Richtung, die durch Ableitung nach der entsprechenden Variablen ermittelt wird. Die andere Variable wird bei diesem Ableitungsschritt als Konstante betrachtet:

$$f^{(x)}(x, y)=\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad , \quad Alternativschreibweise\ f_x(x, y)$$

∂ wird als „partielles Differential“ bezeichnet und erhält ein eigenes Symbol (*teilweise=partielle Differentiation nach einer der Variablen*).

Das „totale Differential“ einer Funktion in zwei Variablen ist

$$df(x, y)=\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy$$

Formal ist es ein 2-dimensionaler Vektorraum mit der Basis $\{dx, dy\}$

Höhere Differentiale erhält man durch Einsetzen und Durchrechnen wie im eindimensionalen Fall:

$$d^2 f(x, y)=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}dx\,dy$$

Dabei ist bei mehrfacher Differentiation die Reihenfolge der Variablen beliebig.

Ein notwendige Bedingung für ein Extremum einer Flächenfunktion ist, dass für das totale Differential gilt

$$df=0$$

Wegen der Beliebigkeit von dx, dy folgt $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=0$. Man erhält also ein System von 2 Gleichungen für die Bestimmung von *x* und *y*.

Aufgaben

1) Weisen Sie nach: $d(u^2)=2\mathrm{u}\,du$
2) Weisen Sie nach: $d^n(u*v)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d^k u*d^{n-k}v$. Hilfe: für die ersten *n* können Sie das direkt nachrechnen (Induktionsanfang). Für den allgemeinen Schritt verwenden Sie die Ergebniss der Übungen der 32. Vorlesung Mathematik I
3) Weisen Sie mit Hilfe der Definition der Ableitung (*Grenzwert*) nach, dass bei Differentiation nach zwei Variablen die Reihenfolge keine Rolle spielt.
4) Testen Sie die Aussage an der Funktion $f(x, y)=e^{\sin(x)*y}*\ln(x+y)$
5) Bilden Sie $d^3 f(x, y)$

6) Ermitteln Sie ein Extremum der Funktion $f(x,y)=x^2+y^2-4x-9y+13$

7) $df=0$ ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend für ein Maximum. Ermitteln Sie ähnlich wie im $\mathbb{R}^2$ Nebenbedingungen, die das 2. totale Differential erfüllen muss.

3. Vorlesung

Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

Für Tangenten an implizite Funktionen $f(x,y)=0$ erhalten wir mit Hilfe des Differentials

$$d\,f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=y'=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Hinweis: die Null bedeutet hier, dass das totale Differential immer Null ist un nicht etwa, dass hier nur ein Extremum gesucht wird.

Eine Gleichung, die mit einer Funktion $y(x)$ auch deren Ableitung(en) $y', y'', \ldots$ enthält, heißt Differentialgleichung. Die Fragestellung, welche Funktionsgleichung(en) eine gegebene Differentialgleichung erfüllt/en, tritt in der Praxis relativ häufig auf, ist jedoch Stoff des 3. Semesters.

Für Funktionen mit komplexen Variablen ist der Ableitungsbegriff wie im Reellen erklärt.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

Ein komplexe Zahl lässt sich in Real- und Imaginärteil zerlegen: $z=x+i*y$. Setzt man dies in die Funktionsgleichung ein, so lässt sich die komplexe Funktion komplett in eine Realteil- und eine Imaginärteilfunktion zerlegen:

$$f(z)=f(x+i*y)=g(x,y)+i*h(x,y)$$

Die Funktionen $g(x,y), h(x,y)$ sind rein reelle Funktionen in zwei reellen Variablen. Für die Ableitung erhält man mit $\Delta z=\Delta x+i*\Delta y$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{g(x+\Delta x,y+\Delta y)+i*h(x+\Delta x,y+\Delta y)-g(x,y)-i*h(x,y)}{\Delta x+i*\Delta y}$$

Die weitere Aufarbeitung diese Ausdrucks erfolgt in der nächsten Vorlesungsstunde.

Aufgaben

Eine Ellipse hat die Funktionsgleichung $a*x^2+b*y^2-r=0$. Welche Steigung haben die Tangenten an die Ellipse in den Schnittpunkten der Ellipse mit der Geraden $y=c*x$?

Zerlegen Sie folgende komplexe Funktionen in ihre Real- und Imaginärteile:

$$f(z)=(a+i*b)*z^2+(c+i*d)*z+(e+i*f)$$

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}$$

$$f(z)=z*e^z$$

4. Vorlesung

Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

Fortsetzung der Untersuchung der Ableitung komplexer Funktionen. Da die Ableitung unabhängig von der Annäherungsmethode an den Punkt *z* ist, können wir den zuletzt ermittelten Term getrennt für *x* und *y* auswerten ($\Delta y = bzw. \Delta x = 0$). Dies führt auf folgende Beziehungen zwischen den Ableitungen:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} \quad und \quad \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

Diese Gleichungen sind als „Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen“ bekannt und spielen eine Rolle in den Feldgleichungen der theoretischen Elektrotechnik (*einer der Gründe, weshalb komplexe Zahlen in der Elektrotechnik so beliebt sind*).

Extremwerte mit Nebenbedingungen. Für ein Extremum einer Funktion ist eine Nullstelle der Ableitung eine notwendige Bedingung (*hinreichend aber erst im Zusammenhang mit Eigenschaften höherer Ableitungen*). Sind mehrere Variable im Spiel, so existieren häufig Nebenbedingung, mit denen einige Variablen eliminiert werden können:

$f(x,y)$: Funktion, deren Extremum zu ermitteln ist

$g(x,y)=0$: Nebenbedingung, funktionaler Zusammenhang zwischen *x* und *y*

Aus den Nebenbedingungen und der Aufgabenstellung resultieren oft noch weitere Bedigungen, beispielsweise einzuhaltende Definitionsbereiche: $x \in [a,b]$

Vorgehensweise: $g(x,y)=0$ nach *y* auflösen, in $f(x,y)$ einsetzen, Ableitung bilden und deren Nullstellen bestimmen. Eine so gefundene Nullstelle ist Lösung, wenn aus den höheren Ableitungen (*oder dem Aufbau*) die gesuchte Extremumart resultiert und der Wert im Definitionsbereich liegt (*andernfalls ist eine der Intervallgrenzen der gesuchte Extremalwert*).

Vorgestellt an mehreren Beispielen. Nicht behandelt wegen Lahmheit des Publikums: Lagrange'sche Multiplikatoren für eine zusätzliche Teillinearisierung komplexerer Systeme (*wird später nachgeholt*).

Nullstellenberechnung bei komplizierteren Gleichungen. Wiederholung: Bisektionsverfahren, Erzwingen einfacher Nullstellen bei Polynomen durch

$$P_e(x) = \frac{P(x)}{ggT(P(x), P'(x))}$$

(*siehe Vorlesungen Mathematik I, dort bereits komplett behandelt*).

Aufgaben

Prüfen Sie die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen durch Differenzieren der in Real- und Imaginärteile zerlegten Funktion aus den Aufgaben zur 3. Vorlesung.

Aus einer rechteckigen Platte mit den Maßen 3m*5m soll ein Verschlag an eine Häuserwand angebaut werden. Der Verschlag hat ein Dach, eine Vorderseite und ein Seitenteil, die 2. Seite bleibt offen. Wie müssen die Platten zugeschnitten werden, damit

a) das Volumen möglichst groß wird,

b) der Verschnitt möglichst klein wird.

5. Vorlesung

Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

Wiederholung: Polynome mit einfachen Nullstellen erzwingen.

Newton'sches Iterationsverfahren. Aus dem nichtlinearen Problem, entlang einer Kurve die Nullstelle zu finden, wird mit Hilfe der Differential ein lineares Problem erzeugt, dass einen Näherungswert für die Nullstelle liefert. Dies führt auf die Iterationsfunktion

$$x_{n+1}=\Phi(x_n)=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Wenn das Verfahren konvergiert, existiert ein Fixpunkt $x=\Phi(x)$ (*vergleiche Banach'schen Fixpunktsatz in Vorlesung 34, 1. Semester*).

Eine genauere Untersuchung liefert Konvergenz im Fall

$$sign(x_n-x)*sign(f'(x))*sign(f''(x))=1$$

Es muss daher für eine Einsatzbeurteilung einiges über die Funktion bekannt oder ein Algorithmus vorhanden sein, der Intervalle auf die Existenz von Nullstellen untersuchen kann (*siehe aber auch Aufgaben, Kriterien für den praktischen Einsatz auf dem Computer wurden ebenfalls diskutiert*).

Praktisches Beispiel: Berechnen von $\sqrt{a}$. Mit $f(x)=x^2-a$ finden wir

$$\Phi(x)=1/2(x+\frac{a}{x})$$

Bei der Iteration verdoppelt sich die Anzahl guter Stellen in jedem Iterationsschritt

Beispiel 2: Division zweier Zahlen mit Hilfe einer Iteration.

Aufgaben

Untersuchen Sie ein Schema, dass $sign(f(x)), sign(f'(x)), sign(f''(x))$ verwendet, um Konvergenz vorherzusagen (*wurde in der Vorlesung bereits vorgeführt*).

6. Vorlesung

Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

Für die Iteration einer Division finden wir mit $\frac{a}{b}=a*(b^{-1})$ den allgemeinen Ansatz $f(x)=x^n*b^n-1$. Mit $n=-1$ finden wir die Iterationsfunktion $\Phi(x)=2*x-x^2*b$, die keine Division mehr enthält und deren Fixpunkt b^{-1} ist. Die weitere Untersuchung wie in Vorlesung 5 zeigt, dass eine Konvergenz bei Annäherung von kleineren Werten (*bei positivem b*) erfolgt.

Um Intervalle zu finden, in denen eine Funktion Nullstellen besitzt, kann man sich bei reellen Funktionen, speziell Polynomen, der Sturm'schen Kette bedienen. Die Sturm'sche Kette ist eine Funktionenfolge $f_{0,}f_{1,\ldots}f_n$ mit den Eigenschaften

a) $f_n(x)=c\neq 0$

b) $f_0(a)=0 \Rightarrow f_1(a)\neq 0$

c) $f_k(a)=0 \Rightarrow sign(f_{k-1}(a))=-sign(f_{k+1}(a))\neq 0$

Diese Bedingungen sorgen dafür, dass die Anzahl der Vorzeichenwechseln in der Kette bei Auswertung für verschiedene Argumente sich nur dann ändern kann, wenn $f_0(x)$ zwischen den Werten eine Nullstelle besitzt (*genauere Präsentation der Idee in der Vorlesung*). Um die Anzahl der Nullstellen in einem Intervall $[a,b]$ festzustellen, ist der Betrag der Differenz der Vorzeichenwechsel in der Kette an den Stellen *a* und *b* zu berechnen.

Für Polynome lässt sich eine Sturm'sche Kette folgendermaßen erzeugen:

$$f_0(x)=P(x)/ggT(P(x),P'(x))$$
$$f_1(x)=P(x)/ggT(P(x),P'(x))$$
$$f_{k-1}(x)=q(x)*f_k(x)-f_{k+1}(x)$$

Krümmungskreis und Krümmungsradius. Anstelle einer Tangente an eine Kurve kann man auch einen Schmiegekreis an die Kurve legen, der das Verhalten in der näher der untersuchten Stelle u.U. Besser beschreibt als eine Gerade. Die Koordinaten des Kreismittelpunktes sollen im weiteren bestimmt werden.

1. Erkenntnis: die den Radius bechreibende Gerade ist senkrecht zur Tangente.

Fortsetzung in der nächsten Stunde.

Aufgaben

Begründen Sie die Funktionsweise der Sturm'sche Kette nochmals grafisch (*Wiederholung des Vorlesungsinhaltes*).

Untersuchen Sie $P(x)=x^3-1{,}5*x^2+0{,}71*x-0{,}105$ im Intervall $[0,1]$ auf Nullstellen mit Hilfe einer Sturm'schen Kette.

Berechnen sie die Nullstelle von $P(x)=x^3-3\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}-9$ mit Hilfe einer Newton-Iteration (*3-fache Nullstelle bei* $x=3$). Beobachten Sie das Verhalten der Werte bei Annäherung von Links und Rechts an die Nullstelle. Vergleichen Sie es mit der Berechnung einer Nullstelle von $P(x)=x^3-3\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}-10$. Könnten Rundungsfehler eine Rolle bei dem unterschiedlichen Verhalten spielen?

7. Vorlesung

Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

Krümmungskreis. Der Tangentenvektor an einen Funktionsgraph $y=f(x)$ ist durch $\vec{\alpha}'(x)=\begin{pmatrix}1\\ f'(x)\end{pmatrix}$ gegeben. Mittels Drehmatrizen finden wir als Vektor auf der Verbindungslinie Kreismittelpunkt-Kurvenpunkt $\vec{r}=\begin{pmatrix}f'(x)\\ -1\end{pmatrix}$. Die Richtung muss ggf. noch festgelegt werden.

Legen wir in den Krümmungskreis einen Einheitskreis und betrachten zwei nahe beieinander liegende Punkte auf dem Krümmungskreis bzw. der Kurve, so folgt aus dem Strahlensatz $\kappa=\frac{1}{r}=\frac{d\alpha}{ds}$, wobei $d\alpha$ der Winkel oder Kreisbogenabschnitt des Einheitskreises ist, ds die (differentielle) Kurvenlänge. κ Wird Krümmung genannt, der Kehrwert ist der Krümmungsradius.

$d\alpha$ ist aufgrund der Geometrie auch die Änderung des Winkels zwischen Tangente und X-Achse. Wegen $f'(x)=\tan(alpha)$ gilt dann $d\alpha=\frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}dx$.

Für ds finden wir entsprechend $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+f'(x)^2}dx$, also

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{f''(x)}{\left(1+f'(x)^2\right)^{3/2}}$$

Dieser Ausdruck enthält bei genauerer Analyse bereits die Richtung des Raduisvektor.

Der Ortsvektor des Kreismittelpunktes ist somit

$$\vec{R}=\frac{1}{\kappa}\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}+\begin{pmatrix}x\\ f(x)\end{pmatrix}$$

=> Sie haben hier Kenntnisse aus der Geometrie, der Vektor- und Matrizenrechnung und der Differentialrechnung benötigt und im Zusammenspiel gesehen.

Integralrechnung. Anwendungsbeispiel: gefahrene Strecke aus der Aufzeichung eines Fahrtenschreibers, der die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit notiert, ermitteln.

Wir definieren die Abbildung $I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$. Sie bildet eine Funktion auf einem Intervall $[a,b]\subset\mathbb{R}$ auf einen Wert $I\in\mathbb{R}$ ab und heißt bestimmtes Integral der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a,b]$.

Voraussetzung für die Existenz des Integrals: sei $f(x)$ eine beschränkte Funktion, dann existieren Schranken, so dass $m\leq f(x)\leq M$ auf $[a,b]$. Dann folgt $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$.

Aufgaben

a) Gegeben sei $y=x^2$. Versuchen Sie, den Graphen, auf dem die Mittelpunkte aller Schmiegekreise liegen, zu ermitteln. Hilfe: versuchen Sie zunächst, aufgrund plausibler Überlegungen einen Graphen zu skiziieren. Versuchen Sie anschließend, die analytische Darstellung (*Kurve* $\vec{\beta}(x)$) zu berechnen (*Formeln aus der Vorlesung*) und prüfen Sie Ihre Annahmen.

b) Die Voraussetzungen für die Existenz eines Integrals sind so wie oben nicht vollständig. Zusätzlich zur Beschränkheit ist zu fordern, dass nur endlich viele Unstetigkeitsstellen existieren. Versuchen Sie, dies zu begründen.

8. Vorlesung

Die Vorlesungsinhalte in Stichworten

Wiederholung: auf einem Intervall differenzierbare Funktion, stetige Funktion, beschränkte Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen, beschränkte Funktion mit unbeschränkter Menge an Unstetigkeitsstellen. Im Folgenden ist jeweils darauf zu achten, die richtigen Voraussetzungen an den Funktionstyp zu stellen.

Aus $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(\xi)(x_k - x_{k-1}) \quad mit \quad x_0 = a\,, x_n = b$ lässt sich folgendes Ableiten:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b dx = (b-a)$$

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b c*f(x)dx = c*\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$f(x) \le g(x), a < b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f|(x)dx$$

$$sign(g(x)) = const.: \int_a^b f(x)*g(x)dx = f(\xi)*\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)*(b-a)$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen definieren wir nun den Begriff Stammfunktion. Aus $I(t) = \int_a^t f(x)dx$ mit variabler Obergrenze *t* finden wir: $I'(x) = \frac{dI(x)}{dx} = f(x)$. Eine Stammfunktion ist eine Funktion, deren Ableitung die Funktion unter dem Integral ist.

-> bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x)dx = I$, berechnen eines Zahlenwertes

-> unbestimmtes Integral: $\int f(x)dx = I(x)$, bestimmen der Stammfunktion.

Beispiele für die Umkehrung der Differentiation, einfache Integrationsregeln für Standardfunktionen.

Aufgaben

Gibt es diesmal nicht. Üben Sie die Umkehrung einfacher Standardfunktionen und machen Sie sich die o.g. Beziehungen klar.

Ausklang

An dieser Stelle war die Vorlesung mitten im Semester zu Ende. Ein Kollege beschloss, statt die Studenten zum Üben anzuhalten, die Aufgaben als zu schwer zu bezeichnen und das Abhalten von Übungsstunden zu verweigern. Der Dekan beschloss, den Studenten einen anderen Prüfungsweg zu öffnen. Diskutiert wurde nicht darüber (obwohl dies behauptet wird). Nach dieser Demontage des Lehrenden durch Kollegen waren die Voraussetzung für eine weitere Lehre nicht mehr gegeben.

Die folgenden Aufgaben sind sicher nicht ganz ernst gemeint, drücken aber das aus, wohin das System meiner Meinung nach führt (genau solche Sprüche werden seit geraumer Zeit über das Schulsystem gemacht, und offenbar ist es in Teilen auch dort angekommen).

1) Sei $f(x)$ eine reelle Funktion. Zeichnen Sie einen beliebigen Graphen und singen Sie ein Lied darüber.
2) *ds* ist die differentielle Bogenlänge. Unterstreichen Sie das Wort „Bogenlänge“ und diskutieren Sie mit Studenten aus anderen Kulturkreisen darüber.
3) Zum Integral einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$: suchen Sie den Begriff „Integral“ mit Google im Internet und versteigern Sie ihn anschließend bei ebay.
4) Sei $g(x)$ eine Funktion mit blauem Graphen auf weißem, grau karierten Grund. Nehmen Sie Kontakt zu einem Sozialpädagogen Ihrer Wahl auf und lasse Sie sich die differenzierte Betrachtungsweise erklären.
5) Laden Sie die Daten eines beliebigen Top-Models aus dem Internet (*beispielsweise Claudia Schiffer*). Führen Sie eine Kurvendiskussion durch und achten Sie besonders auf Rundungsfehler.

Ich kann das nicht gut heißen. Ich versuche, mich in meinem Fach permanent zu verbessern. Ich erwarte, dass Studenten mich als Lehrer fordern und sich um Weiterkommen bemühen. Darin werde ich sie unterstützen. Für Verweigerung gibt es bei mir weder Unterstützung noch Anerkennung.

Ich liebe die Mathematik. Ein Großteil meiner Arbeiten hat mathematische Inhalte und wird sie auch behalten.

Resignation? Nach 10 Jahren Hochschuldienst: JA. **Ich werde keine Mathematik mehr lehren.**